1

உறவுகளும் சார்புகளும்

கணிதவியலாளர்கள் பொருட்களைப் பற்றி அறிய விரும்புவதில்லை, ஆனால் அவற்றிற்கு இடையே அமைந்த தொடர்பை வெளிப்படுத்துவார்கள்... பொருள்களின் அளவு முக்கயமில்லை, ஆனால் அவற்றின் வடிவத்தை புரிந்துக் கொள்ளவே விரும்புவர்.
–ஹென்றி பாயின்கேரே


காட்ஃபிரெய்ட் வில்ஹெல்ம் லீபிநிட்ஸ்
(1646 – 1716)

காட்ஃபிரெய்ட் வில்ஹெல்ம் லீபிநிட்ஸ் (வான் லீபிநிட்ஸ் என்றும் கூறலாம்) முக்கிய ஜெர்மன் கணிதமேதை, தத்துவவாதி இயற்கையாளர் மற்றும் கண்டுபிடிப்பாளராவார். இவர் மண்ணியல், மருத்துவம், உயிரியல், நோய் தொற்றியல், புதைபடிமவியல், உளவியல் பொறியியல், மொழி நூல், சமூகவியல் நெறிமுறைகள், வரலாறு, அரசியல், சட்டம் மற்றும் இசைக் கோட்பாடு போன்ற 26 தலைப்புகளில் விரிவாகத் தனது பங்களிப்பை வழங்கியுள்ளார். லீபிநிட்ஸ் பயன்படுத்திய வார்த்தை 'சார்பு' ஆனது ஒரு வளைவின் எந்த அளவும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு மாறுபடும் என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது.

ஒரு வளைவரையில் காணப்படும் புள்ளிக்கு ஏற்றவாறு மாறும் தன்மையைக் குறிக்க லீபிநிட்ஸ் "சார்பு" என்ற வார்த்தையைப் பயன்படுத்தினார்.

பூலியன் இயற்கணிதம் மற்றும் தர்க்கச் சிந்தனைகளின் அடிப்படைகளை வழங்கினார். இவை இன்றைய நவீனக் கணினிகள் செயல்பாட்டிற்கு அடித்தளமாக அமைந்தன. பல்வேறு துறைகளில் சாதனை புரிந்ததற்காக "பயன்பாட்டு அறிவியலின் தந்தை" என அறிவியல் உலகம் இவரைப் போற்றுகிறது.

6NJ6AC

கற்றல் விளைவுகள்

- கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கலை வரையறுத்தல் மற்றும் கணக்கிடுதல்.
- உறவுகளை, கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாக அறிந்து கொள்ளுதல்.
- சார்பை ஒரு சிறப்பு உறவாகப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- அம்புக்குறி, வரிசைச் சோடிகள், அட்டவணை மற்றும் வரைபடம் மூலமாகச் சார்பைக் குறிப்பிடுதல்.
- சார்புகளை ஒன்றுக்கொன்று, பலவிற்கொன்று, மேல் சார்பு, உட்சார்பு மற்றும் இருபுறச் சார்பு என வகைப்படுத்துதல்.
- பல சார்புகளின் இணைத்தலை சேர்ப்புச் செயல்பாடுகள் மூலம் அறிதல்.
- நேரிய, இருபடி, கன, தலைகீழ்ச் சார்பு வரைபடங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.

1.1 அறிமுகம் (Introduction)

கணிதத்தில், அதிகமான கோட்பாடுகளைப் படிப்பதற்கு, கணங்களின் கருத்து தேவைப்படுகிறது. கணமானது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட, பொருள்களின் தொகுப்பு ஆகும். அதாவது ஒரு கணமானது, தெரிந்த பொருள்களினால் ஆன தொகுப்பு ஆகும். இந்த அத்தியாயத்தில், கணங்கள் 'உறவுகள்' மற்றும் 'சார்புகள்' ஆகியவற்றை எவ்வாறு அமைக்கின்றன எனக் கற்க முற்படுகிறோம். இதற்காக, நாம் இரண்டு வெற்றில்லாத கணங்களின், கார்டீசியன் பெருக்கலைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

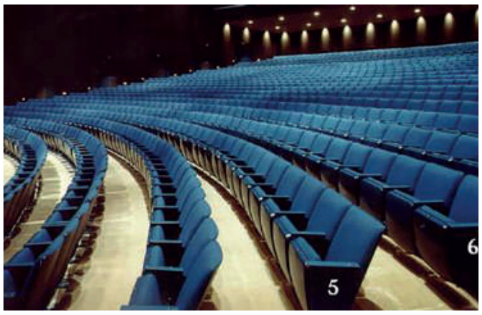
நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் பெரும்பாலான செய்திகளை உறவுகள் அல்லது சார்புகளைப் பயன்படுத்திப் புரிந்து கொள்ளலாம். வாகனத்தில் குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட தொலைவைக் கடப்பதைச் சார்பின் மூலம் குறிப்பிடலாம். ஒரு பொருளின் விலையை, தேவையின் அடிப்படையில்

சார்பின் மூலமாக வெளிப்படுத்தலாம். பலகோணங்களின் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு, வட்டம், நேர்வட்டக் கூம்பு, நேர்வட்ட உருளை, கோளம் ஆகியவற்றின் கன அளவுகளை ஒன்று அல்லது பல மாறிகளை உடைய சார்பாகக் குறிப்பிடலாம்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் நாம் கணங்களைப் பற்றி படித்தோம். மேலும் நாம் கொடுக்கப்பட்ட கணங்களிலிருந்து புதிய கணங்களைச் சேர்ப்பு, வெட்டு, நிரப்பி ஆகியவற்றைக் கொண்டு எவ்வாறு உருவாக்கலாம் என்பதையும் பார்த்தோம்.

நாம் தற்போது கொடுக்கப்பட்ட இரு கணங்கள் A மற்றும் B -யிலிருந்து கார்டீசியன் பெருக்கல் வாயிலாகப் புதிய கணம் உருவாக்கும் முறையைப் பற்றி படிக்கலாம்.

1.2 வரிசைச் சோடி (Ordered Pair)


படம் 1.1

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கில் (படம் 1.1) அமர்வதற்காக உள்ள இருக்கைகளை உற்று நோக்கவும். ஒருவர் அவரது இருக்கையில் அமரும் இடத்தைக் கண்டறிய உதவும்படி, (1,5), (7,16), (3,4), (10,12) ... என இருக்கை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஒருவருக்கு (4,10) எனக் கிடைத்தால் அவர் 4-வது வரிசையில் 10–வது இருக்கையில் அமர வேண்டும். எனவே, முதல் எண் வரிசையையும், இரண்டாவது எண் இருக்கை எண்ணையும் குறிப்பிடுகின்றன. (5,9) என்ற இருக்கை எண்ணைப் பெறும் பார்வையாளர் எந்த இடத்தில் அமர்வார்? அவர் 9-வது வரிசையில் 5-வது இருக்கைக்குச் செல்லலாமா? (9,5) மற்றும் (5,9) இரண்டும் ஒரே இருக்கையைக் குறிக்கின்றனவா? கண்டிப்பாக இல்லை. (2,3), (6,3) மற்றும் (10,3) என்ற இருக்கை எண்களைப் பற்றி என்ன கூறுகிறீர்கள்?

இருப்பிடத்தைத் துல்லியமாகக் குறிக்கின்ற எண்களின் சோடிக்கு இது ஓர் எடுத்துக்காட்டு. இத்தகைய சோடிகளை எண்களின் "வரிசை சோடி" என்கிறோம். கணிதத்தில் காணும் "உறவுகள்" என்ற கோட்பாட்டைக் கற்க வரிசைச் சோடிகள் பயன்படுகின்றன.

1.3 கார்டீசியன் பெருக்கல் (Cartesian Product)

A388HM

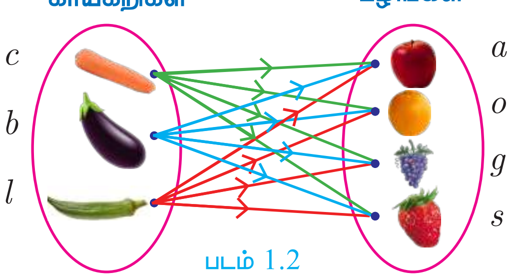
விளக்கம் 1

நாம் பின்வரும் இரண்டு கணங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

கணம் A–ல் மூன்று காய்கறிகளும் மற்றும் கணம் B-ல் நான்கு பழங்களும் உள்ளன. அதாவது, A={கேரட், கத்திரிக்காய், வெண்டைக்காய்} மற்றும் B={ஆப்பிள், ஆரஞ்சு, திராட்சை, செம்புற்றுப்பழம்}

ஒரு காயும், ஒரு பழமும் தேர்ந்தெடுப்பதற்குச் சாத்தியமான வழிகள் யாவை?

காய்கறிகள் (A)	பழங்கள் (B)
கேரட் (c)	ஆப்பிள் (a)
கத்திரிக்காய் (b)	ஆரஞ்சு (o)
வெண்டைக்காய் (l)	திராட்சை (g)
	செம்புற்றுப்பழம் (s)



படம் 1.2

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 12 விதமான சோடிகளின் மூலம் நாம் தேர்வு செய்யலாம்.

$\{(c, a), (c, o), (c, g), (c, s), (b, a), (b, o), (b, g), (b, s), (l, a), (l, o), (l,g), (l, s)\}$

காய்கறிகள் மற்றும் பழங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கலை மேற்கண்ட சேகரிப்பு குறிக்கிறது.

வரையறை

A மற்றும் B என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், இவற்றின் வரிசைச் சோடிகளின் கணமானது (a, b) $a \in A$, $b \in B$ என இருக்கும். இதை A மற்றும் B–யின் **கார்டீசியன் பெருக்கல்** என்கிறோம். எனவே, $A \times B = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\}$. $A \times B$ என்பதை $(A$ கிராஸ் $B)$ எனப் படிக்கவும்.

குறிப்பு

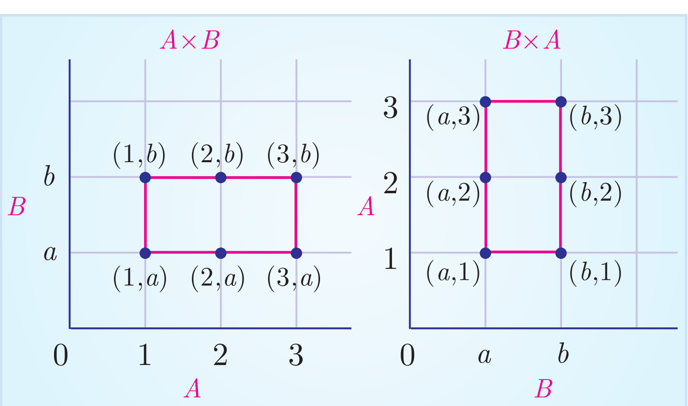
- $A \times B$ ஆனது, A மற்றும் B என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், அதன் முதல் உறுப்பு A-யின் உறுப்பாகவும், இரண்டாவது உறுப்பு B-யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- $B \times A$ ஆனது, A மற்றும் B என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், முதல் உறுப்பு B-யின் உறுப்பாகவும் இரண்டாவது உறுப்பு A–யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- பொதுவாக $(a, b) \neq (b, a)$. குறிப்பாக, $a = b$ எனில், $(a, b) = (b, a)$
- கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறுக்கு பெருக்கல் (cross product) எனவும் குறிப்பிடலாம்.

விளக்கம் 2

$A = \{1, 2, 3\}$ மற்றும் $B = \{a, b\}$ எனில், $A \times B$ மற்றும் $B \times A$-ஐ எழுதுக.

$A \times B = \{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ (படம் 1.3 –ல் காட்டியுள்ளபடி)

$B \times A = \{a,b\} \times \{1,2,3\} = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ (படம் 1.3 –ல் காட்டியுள்ளபடி)



படம் 1.3

சிந்தனைக் களம்

எப்போது $A \times B$ ஆனது $B \times A$ விற்கு சமம்?

குறிப்பு

- பொதுவாக $A \times B \neq B \times A$, ஆனால் $n(A \times B) = n(B \times A)$
- $A \times B = \phi$ எனில், $A = \phi$ அல்லது $B = \phi$
- $n(A) = p$ மற்றும் $n(B) = q$ எனில், $n(A \times B) = pq$

நிலையான முடிவற்ற கணங்களுக்கான மீள் பார்வை

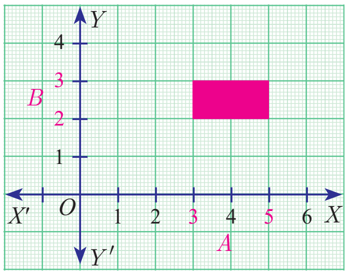
இயல் எண்கள் $\mathbb{N} = \{1,2,3,4\ldots\}$; முழு எண்கள் $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \ldots\}$;

முழுக்கள் $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$; விகிதமுறு எண்கள் $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$;

மெய் எண்கள் $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$, இங்கு $\mathbb{Q}'$ -ஆனது விகிதமுறா எண்களின் கணமாகும்.

விளக்கம் 3

A என்ற கணமானது, $[3, 5]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் மற்றும் B என்ற கணமானது, $[2, 3]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் எனில், $A\times B$-யின் கார்டீசியன் பெருக்கல் ஆனது படம் 1.4 –ல் காண்பது போலச் செவ்வகப் பகுதியைக் குறிக்கும். $A\times B$ என்ற கணத்தின் (x, y) என்ற புள்ளிகள் செவ்வகப் பகுதியில் அமைந்திருக்கும்.



படம் 1.4

முன்னேற்றச் சோதனை

1. A மற்றும் B ஆகியன ஏதேனும் இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், $A\times B$-ஐ ______ எனலாம்.
2. $n(A\times B)=20$ மற்றும் $n(A)=5$ எனில், $n(B)$ ஆனது ______
3. $A = \{-1,1\}$ மற்றும் $B=\{-1,1\}$ எனில், வடிவியல் முறையில் $A\times B$ கணத்தின் புள்ளிகள் யாவை?
4. A, B என்பவை முறையே $[-4, 3]$ மற்றும் $[-2, 3]$-க்கு இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் எனில், A மற்றும் B-ன் கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறிப்பிடுக.

குறிப்பு

கார்டீசியன் தளத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணத்தை (x, y) என்ற வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக அறியலாம். இதில் x, y ஆகியவை மெய்யெண்கள். $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்ற கணத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் சேர்த்து நாம் கார்டீசியன் தளம் என அழைக்கிறோம்.

செயல்பாடு 1

$A=\{x\mid x\in\mathbb{N}, x\le 4\}$, $B=\{y\mid y\in\mathbb{N}, y<3\}$ எனில் $A\times B$ மற்றும் $B\times A$-ஐ வரைபடத்தாளில் குறிக்க $A\times B$ மற்றும் $B\times A$-க்கு உள்ள வேறுபாட்டை உங்களால் காணமுடிகிறதா?

எடுத்துக்காட்டு 1.1 $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3\}$ எனில் (i) $A\times B$ மற்றும் $B\times A$-ஐ காண்க. (ii) $A\times B=B\times A$ ஆகுமா? இல்லையெனில் ஏன்? (iii) $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A)\times n(B)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $A\times B = \{1,3,5\}\times\{2,3\} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3)\}$ ...(1)

$B\times A = \{2,3\}\times\{1,3,5\} = \{(2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$ ...(2)

(ii) (1) மற்றும் (2)-ன் மூலமாக $A\times B\neq B\times A$ ஏனெனில் $(1,2)\neq(2,1)$, $(1,3)\neq(3,1)$...

(iii) $n(A)=3$; $n(B) = 2$.

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நாம் காண்பது, $n(A\times B) = n(B\times A) = 6$;

$n(A)\times n(B) = 3\times 2 = 6$ மற்றும் $n(B)\times n(A) = 2\times 3 = 6$

எனவே, $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A)\times n(B) = 6$.

ஆகவே, $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A)\times n(B)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.2 If $A\times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$ எனில் A மற்றும் B -ஐ காண்க.

தீர்வு $A\times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

$A = \{A\times B$ -யின் முதல் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்$\}$. எனவே, $A = \{3,5\}$

$B = \{A\times B$ -யின் இரண்டாம் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்$\}$. எனவே, $B = \{2,4\}$

எனவே $A = \{3,5\}$ மற்றும் $B = \{2,4\}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.3 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \le x < 2\}$ மற்றும் $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$. என்க. (i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ என்பனவற்றைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\} = \{2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \le x < 2\} = \{0,1\}$,

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{1,2\}$

(i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$$B\cup C = \{0,1\}\cup\{1,2\} = \{0,1,2\}$$

$$A\times(B\cup C) = \{2,3\}\times\{0,1,2\} = \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\} \quad \ldots(1)$$

$$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$

$$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cup\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$= \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\} \quad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து, $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

$$B\cap C = \{0,1\}\cap\{1,2\} = \{1\}$$

$$A\times(B\cap C) = \{2,3\}\times\{1\} = \{(2,1),(3,1)\} \quad \ldots(3)$$

$$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$

$$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$(A\times B)\cap(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cap\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$= \{(2,1),(3,1)\} \quad \ldots(4)$$

(3) மற்றும் (4), $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

குறிப்பு

மேலே, சரிபார்க்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் முறையே கார்டீசியன் பெருக்கலின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுகளின் மீதான பங்கீட்டு பண்புகளாகும். A, B மற்றும் C என்பன ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

(i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

1.3.1 மூன்று கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் (Cartesian Product of three Sets)

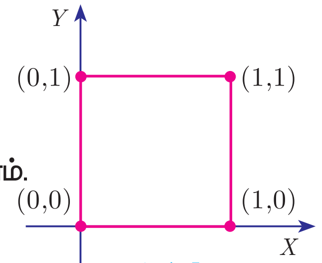
A, B, C ஆகியவை வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், அதன் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலனின் கணமானது அனைத்து சாத்தியமான வரிசையில் அமைந்த மூன்றின் தொகுதிகளின் கணமாகும்.

$A\times B\times C = \{(a,b,c)$ அனைத்து $a\in A, b\in B, c\in C\}$

இரண்டு மற்றும் மூன்று கணங்களுக்கான கார்டீசியன் பெருக்கலின் வடிவியல் விளக்கம்.

$A=\{0,1\},\ B=\{0,1\},\ C=\{0,1\}$ என்க

$$A\times B = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$



படம் 1.5

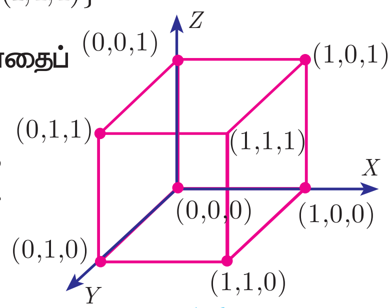
$A\times B$ ஆனது XY - தளத்தில் (plane) குறிக்கப்பட்டுள்ளதைப் படம் 1.5–ல் காணலாம்.

$$(A\times B)\times C = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\times\{0,1\}$$

$$=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0),(1,1,1)\}$$

$A\times B\times C$ ஆனது XYZ - என்ற வெளியில் (space) குறிக்கப்பட்டுள்ளதைப் படம் 1.6 ல் காணலாம்.

$A\times B$ என்பது இரு பரிமாணத்தில் சதுரத்தின் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது. $A\times B\times C$ என்பது முப்பரிமாணத்தில் கனசதுரத்தின் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.



படம். 1.6

குறிப்பு

பொதுவாக, இரண்டு வெற்றில்லா கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் இரு பரிமாணங்களைக் கொண்ட வடிவத்தை ஏற்படுத்தும். அதேபோல் மூன்று வெற்றில்லா கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் மூன்று பரிமாணங்களைக் கொண்ட முப்பரிமாணப் பொருளை ஏற்படுத்தும்.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றிற்கு $A\times B$, $A\times A$ மற்றும் $B\times A$ ஐக் காண்க.
   (i) $A=\{2,-2,3\}$ மற்றும் $B=\{1,-4\}$ (ii) $A=B=\{p,q\}$ (iii) $A=\{m,n\}$; $B=\phi$
2. $A=\{1,2,3\}$ மற்றும் $B=\{x \mid x$ என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்$\}$ எனில், $A\times B$ மற்றும் $B\times A$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
3. $B\times A=\{(-2,3),(-2,4),(0,3),(0,4),(3,3),(3,4)\}$ எனில், A மற்றும் B ஆகியவற்றைக் காண்க.
4. $A=\{5,6\}$, $B=\{4,5,6\}$, $C=\{5,6,7\}$ எனில், $A\times A = (B\times B)\cap(C\times C)$ எனக் காட்டுக.
5. A=$\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{3,4\}$ மற்றும் $D=\{1,3,5\}$ எனில்
   $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D)$ என்பது உண்மையா என சோதிக்கவும்..
6. $A=\{x\in \mathbb{W} \mid x<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 1<x\le 4\}$ மற்றும் $C=\{3,5\}$ எனில், கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.
   (i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
   (iii) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
7. A என்பது 8-ஐ விடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம், B என்பது 8 -ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் மற்றும் C என்பது இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் எனில், கீழ்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க.
   (i) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ (ii) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

1.4 உறவுகள் (Relations)

நம் அன்றாட வாழ்வில் இரு பொருள்கள் சில விதிகளுக்குட்பட்டு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில் இருப்பதை நாம் காண்கிறோம். அந்த இரண்டு பொருள்களும் ஒரு சில விதிகளுக்குட்பட்டு அத்தொடர்பை ஏற்படுத்துகின்றன. அவ்வாறெனில், அத்தொடர்பை எப்படி வெளிப்படுத்தலாம்? இங்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உறவு முறைகள்	உறவை R குறியீட்டின் மூலமாக வெளிப்படுத்துதல்	வரிசைச் சோடிகளின் மூலமாக வெளிப்படுத்துதல்
புதுதில்லியானது இந்தியாவின் தலைநகரம்.	புதுதில்லி R இந்தியா	(புதுதில்லி, இந்தியா)
AB ஆனது XY -யின் குத்துக்கோடு	கோடு AB, R, கோடு XY	(கோடு AB, கோடு XY)
-1 ஆனது -5 -ஐ விடப்பெரியது	-1 R-5	$(-1,\ -5)$
ℓ ஆனது ΔPQR -ன் சமச்சீர்கோடு.	ℓ R ΔPQR	$(\ell,\ \Delta PQR)$

எப்படி புதுதில்லியும் இந்தியாவும் தொடர்புடையன? நாம் பதிலை எதிர்நோக்குகிறோம். புதுதில்லியானது இந்தியாவின் தலைநகரம். ஆனால் புதுதில்லியையும் இந்தியாவையும் பல வழிகளில் தொடர்புபடுத்தலாம். ஒரு சில வழிகள் பின்வருமாறு.

- புதுதில்லியானது இந்தியாவின் தலைநகரம்.
- புதுதில்லியானது இந்தியாவின் வடபகுதியில் உள்ளது.
- புதுதில்லியானது இந்தியாவின் மிகப்பெரிய நகரங்களில் ஒன்று.

நாம் உறவுகளை மிகச் சரியாகக் குறிப்பிட வேண்டுமெனில், ஒரே ஓர் வரிசைச்சோடி (புதுதில்லி, இந்தியா) மட்டும் கொடுத்தால் போதுமானதாக இருக்காது. மேற்கண்ட மூன்று குறிப்புகளும் அதற்குப் பொருந்தும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வரிசைச் சோடிகளில் எந்த உறவுமுறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என நாம் கேட்க நினைத்தால், உறவைக் குறிப்பிடுவது எளிதாக இருக்கும்.

{(புதுதில்லி, இந்தியா), (வாஷிங்டன், அமெரிக்க ஐக்கிய நாடுகள்), (பெய்சிங், சீனா), (லண்டன், இங்கிலாந்து), (காத்மாண்டு, நேபாளம்)} என்ற வரிசைச் சோடிகளில் காணப்படும் உறவை எளிதாக வெளிப்படுத்த முடியும் அல்லவா?

முன்னேற்றச் சோதனை

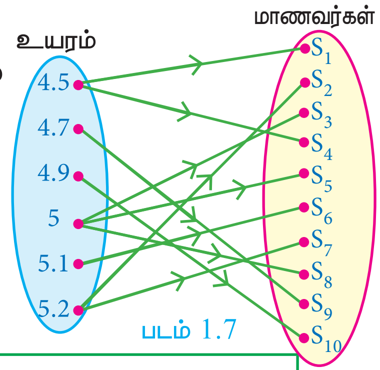
A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c} எனில்

1. பின்வருவனவற்றில் எவை A -யிலிருந்து B -க்கான உறவாகும்?	2. பின்வருவனவற்றில் எவை B -யிலிருந்து A -க்கான உறவாகும்?
(i) { (1, b), (1, c), (3, a), (4, b) }	(i) { (c, a), (c, b), (c, 1) }
(ii) { (1, a), (b, 4), (c, 3) }	(ii) { (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) }
(iii) { (1, a), (a, 1), (2, b), (b, 2) }	(iii) { (a, 4), (b, 3), (c, 2) }

விளக்கம் 4

ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
உயரம் (அடிகளில்)	4.5	5.2	5	4.5	5	5.1	5.2	5	4.7	4.9

உயரத்திற்கும் மாணவருக்கும் இடையிலான உறவை நாம் வரையறுக்கலாம். (படம்.1.7)



படம் 1.7

R = {(உயரம், மாணவர்)}

$$R=\{(4.5,S_1),\ (4.5,S_4),\ (4.7,S_9),\ (4.9,S_{10}),\ (5,S_3),\ (5,S_5),(5,S_8),\ (5.1,S_6),\ (5.2,S_2),\ (5.2,S_7)\}$$

வரையறை

A மற்றும் B என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் என்க. A -யிலிருந்து B-க்கு உள்ள **உறவு** R ஆனது சில விதிமுறைகளை நிறைவு செய்து, $A\times B$ -யின் உட்கணமாக இருக்கும். $x\in A$ -விற்கும் $y\in B$ -க்குமான உறவு R -யின் வழியாக இருந்தால் $x\mathrm{R}y$ என எழுதலாம். $x\mathrm{R}y$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டும் $(x,y)\in \mathrm{R}$.

உறவு R-யின் **மதிப்பகம்** $=\{x\in A\,|\,x\mathrm{R}y$, ஏதேனும் ஒரு $y\in B\}$

உறவு R-ன் **துணை மதிப்பகம்** $=B$ ஆகும்.

உறவு R–ன் **வீச்சகம்**=$\{y\in B\ |\ x\mathrm{R}y$, ஏதேனும் ஒரு $x\in A\}$

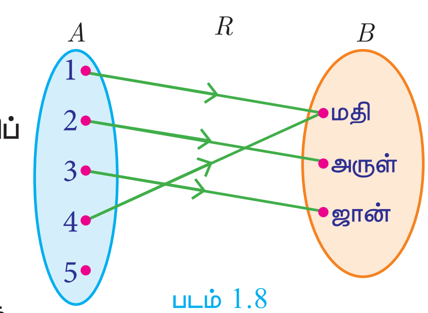
இந்த வரையறைகளிலிருந்து, R–யின் மதிப்பகமானது $\subseteq A$, R-ன் துணை மதிப்பகம் $=B$ மற்றும் R –யின் வீச்சகம் $\subseteq B$ என்பதைக் காணலாம்.

VGRUP4

விளக்கம் 5

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=$ {மதி, அருள், ஜான்} என்க.

மேற்கண்ட A மற்றும் B கணங்களின் உறவு R–ஐ அம்புக்குறிப் படத்தில் குறிக்கலாம். (படம் 1.8)



படம் 1.8

எனவே R–யின் மதிப்பகம் $=\{1,2,3,4\}$

R–யின் வீச்சகம் = {மதி, அருள், ஜான்}

R–யின் மதிப்பகமானது, A–யின் தகு உட்கணமாவதைக் காண்க

செயல்பாடு 2

A மற்றும் B ஆனது xy –தளத்திலுள்ள கோடுகளின் கணங்கள் என்க. A–யில் x– அச்சுக்கு இணையான கோடுகள் உள்ளன. $x\in A$, $y\in B$ என்க. மேலும், $x\mathrm{R}y$ எனில், x ஆனது y –க்கு செங்குத்துக் கோடு எனக் கருதுக. வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி B–யின் உறுப்புகளைக் காண்க..

விளக்கம் 6

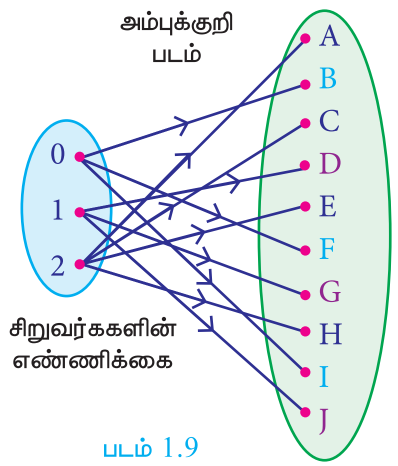
$A=\{1,3,5,7\}$ மற்றும் $B=\{4,8\}$ என்க. A–லிருந்து B–க்கு R என்ற உறவானது 'குறைவாக உள்ளது' என வரையறுக்கப்பட்டால், $1R4$ என எழுதலாம். (1 ஆனது 4–ஐ விடக் குறைவானது). அதைப்போலவே, 1R8, 3R4, 3R8, 5R8, 7R8

அதாவது, R= {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)}

குறிப்பு

மேற்கண்ட விளக்கத்தில், $A\times B$ = {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,4), (5,8), (7,4),(7,8)} R = {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)} R ஆனது $A\times B$ –ன் உட்கணமாக இருப்பதைக் காணலாம்.

விளக்கம் 7



படம் 1.9

ஒரு நகரத்தில் குறிப்பிட்ட பகுதியில் இரண்டு குழந்தைகள் உள்ள பத்துக் குடும்பங்கள் A, B, C, D, E, F, G, H, I மற்றும் J எனக் கருதிக் கொள்வோம். இவற்றில் B, F, I குடும்பங்களில் இரண்டு சிறுமிகளும் D, G, J –யில் ஒரு சிறுவன் மற்றும் ஒரு சிறுமியும், மீதமுள்ள குடும்பங்களில் இரண்டு சிறுவர்களும் உள்ளனர். நாம் உறவு R–ஐ, $x\mathrm{R}y$ என வரையறுக்கலாம். இங்கு x-ஆனது சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையையும், மற்றும் y –ஆனது x எண்ணிக்கையை கொண்ட சிறுவர்கள் உள்ள குடும்பத்தையும் குறிக்கின்றது. இந்த நிலைமையை ஓர் உறவாகக் கொண்டு வரிசைச்சோடிகள் மற்றும் அம்புக்குறி படங்கள் வழியாகக் குறிப்பிடுக.

உறவு R–யின் மதிப்பகம் இரு குழந்தைகள் கொண்ட சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. எனவே, R–யின் மதிப்பகம் $= \{0,1,2\}$ ஆகிய மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும். இங்கு 0 சிறுவர் உள்ள குடும்பங்களே, இரண்டு சிறுமிகளைக் கொண்ட குடும்பங்களாகும். 1 சிறுவர் கொண்ட குடும்பங்களில் 1 சிறுவனும், 1 சிறுமியும் இருப்பார்கள். எனவே, R என்ற உறவானது பின்வருமாறு:

$$\mathrm{R} = \{(0,B),(0,F),(0,I),(1,D),(1,G),(1,J),(2,A),(2,C),(2,E),(2,H)\}$$

இந்த உறவு அம்புக்குறி படத்தில் (படம் 1.9) காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1.4 $A = \{3,4,7,8\}$ மற்றும் $B = \{1,7,10\}$ எனில் கீழ் உள்ள கணங்களில் எவை A–லிருந்து B–க்கு ஆன உறவைக் குறிக்கின்றது?

(i) $\mathrm{R}_1 = \{(3,7), (4,7), (7,10), (8,1)\}$ (ii) $\mathrm{R}_2 = \{(3,1), (4,12)\}$

(iii) $\mathrm{R}_3 = \{(3,7), (4,10), (7,7), (7,8), (8,11), (8,7), (8,10)\}$

தீர்வு $A \times B = \{(3,1), (3,7), (3,10), (4,1), (4,7), (4,10), (7,1), (7,7), (7,10), (8,1), (8,7), (8,10)\}$

(i) $\mathrm{R}_1 \subseteq A \times B$ என்பதைக் காணலாம். எனவே, R_1 என்பது A–லிருந்து B–க்கு ஆன உறவு ஆகும்.

(ii) இங்கு, $(4,12) \in \mathrm{R}_2$, ஆனால் $(4,12) \notin A \times B$. எனவே, R_2 ஆனது A–லிருந்து B–க்கு ஆன உறவு இல்லை.

(iii) இங்கு, $(7,8) \in \mathrm{R}_3$, ஆனால் $(7,8) \notin A \times B$. எனவே, R_3 ஆனது A–லிருந்து B–க்கு ஆன உறவு இல்லை.

குறிப்பு

- ஓர் உறவை, பட்டியல் முறையிலோ அல்லது கணக் கட்டமைப்பு முறையிலோ குறிக்கலாம்.
- உறவைக் காட்சிப்படுத்தி அறிய அம்புக்குறி படத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

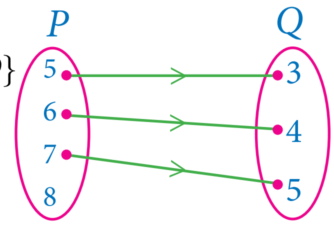
எடுத்துக்காட்டு 1.5 படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள (படம் 1.10) அம்புக்குறி படமானது P மற்றும் Q கணங்களுக்கான உறவைக் குறிக்கின்றது. இந்த உறவை (i) கணகட்டமைப்பு முறை, (ii) பட்டியல் முறைகளில் எழுதுக. (iii) R -ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

தீர்வு

(i) R யின் கணகட்டமைப்பு முறை $\{(x,y)\mid y = x-2,\ x\in P, y\in Q\}$

(ii) R யின் பட்டியல் முறை $=\{(5,3),(6,4),(7,5)\}$

(iii) R யின் மதிப்பகம் $=\{5,6,7\}$; R யின் வீச்சகம் $=\left\{3,4,5\right\}$



படம் 1.10

> **'இன்மை உறவு' (Null relation)**
>
> பின்வரும் எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.
>
> $A=\{-3,\ -2,-1\}$ மற்றும் $B=\{1,2,3,4\}$ எனில், A–லிருந்து B–க்கான உறவை $a-b=8$, $a\in A$, $b\in B$, என வரையறுத்தால், $a-b=8$ என்றவாறு எந்தவொரு (a,b) சோடியும் இல்லை. எனவே, R –ல் எந்த உறுப்பும் இல்லை. அப்படியானால் $\mathrm{R}=\phi$,
>
> ஓர் உறவில் உறுப்புகள் இல்லை என்றால் அது **இன்மை உறவு** எனப்படும்..

> **உங்களுக்குத் தெரியுமா?**
>
> $n(A)=p,\ n(B)=q,$ எனில், A யிலிருந்து B–க்கு கிடைக்கும் மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கையானது 2^{pq} ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. $A=\{1,2,3,7\}$ மற்றும் $B=\{3,0,-1,7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை A-லிருந்து B-க்கான உறவுகளாகும்?

   (i) $\mathrm{R}_1=\{(2,1),(7,1)\}$ (ii) $\mathrm{R}_2=\{(-1,1)\}$

   (iii) $\mathrm{R}_3=\{(2,-1),(7,7),(1,3)\}$ (iv) $\mathrm{R}_4=\{(7,-1),(0,3),(3,3),(0,7)\}$

2. $A=\{1,2,3,4,...,45\}$ மற்றும் R என்ற உறவு "A -யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கப்பட்டால், R–ஐ $A\times A$–யின் உட்கணமாக எழுதுக. மேலும் R–க்கான மதிப்பகத்தையும், வீச்சகத்தையும் காண்க.

3. R என்ற ஒரு உறவு $\left\{(x,y)\,/\,y=x+3,\ x\in\{0,1,2,3,4,5\}\right\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் கண்டறிக.

4. கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் ஒவ்வொன்றையும்

   (1) அம்புக்குறி படம் (2) வரைபடம் (3) பட்டியல் முறையில் குறிக்க.

   (i) $\{(x,y)|x=2y,\ x\in\{2,3,4,5\},\ y\in\{1,2,3,4\}$

   (ii) $\{(x,y)|y=x+3,\ x,\ y$ ஆகியவை இயல் எண்கள் $<10\}$

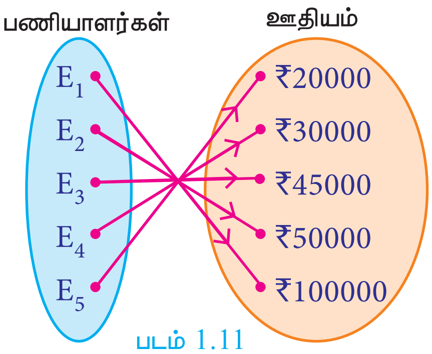
5. ஒரு நிறுவனத்தில் உதவியாளர்கள் (A) எழுத்தர்கள் (C), மேலாளர்கள் (M) மற்றும் நிர்வாகிகள் (E) ஆகிய நான்கு பிரிவுகளில் பணியாளர்கள் உள்ளனர். $A,\ C,\ M$ மற்றும் E பிரிவு பணியாளர்களுக்கு ஊதியங்கள் முறையே ₹10,000, ₹25,000, ₹50,000 மற்றும் ₹1,00,000 ஆகும். $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ மற்றும் A_5 ஆகியோர் உதவியாளர்கள். $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ ஆகியோர் எழுத்தர்கள். $M_1,\ M_2,\ M_3$ ஆகியோர்கள் மேலாளர்கள். மற்றும் $E_1,\ E_2$ ஆகியோர் நிர்வாகிகள் ஆவர். $x\mathbb{R}y$ என்ற உறவில் x என்பது y என்பவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஊதியம் எனில் R–என்ற உறவை, வரிசைச் சோடிகள் மூலமாகவும் அம்புக்குறி படம் மூலமாகவும் குறிப்பிடுக .

1.5 சார்புகள் (Functions)

இரண்டு வெற்றில்லா கணங்களுக்கு இடையேயான பல உறவுகளில் சில குறிப்பிட்ட உறவுகளைச் சார்புகள் என்கிறோம்.

விளக்கம் 8

ஒரு நிறுவனத்தில் 5 பணியாளர்கள் வெவ்வேறு பிரிவுகளில் உள்ளனர். அவர்களது மாத ஊதிய விநியோகத்தை படம் 1.11 மூலம் நாம் காணலாம். இங்கு ஒரு பணியாளருக்கு ஒரு ஊதியம் மட்டுமே தொடர்புடையதாக இருப்பதைக் காண முடிகிறது.



படம் 1.11

குறிப்பிட்ட சிறப்பு உறவுகளைக் கீழ்க்காணும் வாழ்வியல் சூழல் மூலம் காணலாம்.

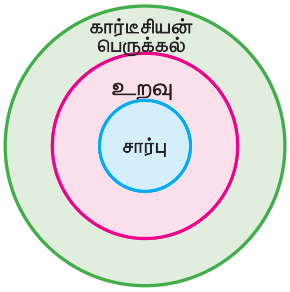
1. உன் வகுப்பு மாணவர்களின் கணத்தை A எனக் கொள்க. ஒவ்வொரு மாணவருக்கும் ஒரே ஒரு வயதுதான் இருக்க முடியும்.
2. நீ கடைக்குச் சென்று ஒரு புத்தகம் வாங்கு. அப்படி வாங்கும் புத்தகத்திற்கு ஒரே ஒரு விலை மட்டுமே இருக்கும். ஒரே புத்தகத்திற்கு இரண்டு விலைகள் இருக்காது. (பல புத்தகங்களுக்கு ஒரே விலை இருக்கலாம்).
3. உங்களுக்குப் பாயிலின் விதி பற்றி தெரிந்திருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வோர் அழுத்தம் P –க்கு ஒரே ஒரு கனஅளவு V மட்டுமே இருக்கும்.
4. பொருளாதாரத்தில், தேவையான பொருளின் எண்ணிக்கையை $Q = 360 - 4P$, எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு P என்பது பொருளின் விலை. P–யின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், ஒரே ஒரு Q – மதிப்பு மட்டுமே கிடைக்கும். எனவே தேவையான பொருளின் எண்ணிக்கை Q ஆனது அப்பொருளின் விலை P- யைப் பொருத்து அமைகிறது.

நாம் இதைப்போன்ற உறவுகளை அடிக்கடி கடந்து வருகின்றோம். இங்கு A– என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் B-ல் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டுமே தொடர்புடையதாக உள்ளது. இத்தகைய உறவுகளையே "சார்புகள்" என்கிறோம். நாம் சார்பை f எனக் குறிப்பிடுவோம்.

வரையறை

X மற்றும் Y என்ற வெற்றில்லா கணங்களுக்கிடையேயான ஒரு உறவு f–ல் ஒவ்வொரு $x \in X$ –க்கும் ஒரே ஒரு $y \in Y$ கிடைக்கிறது எனில், 'f' ஐ நாம் "சார்பு" என்கிறோம்.

அதாவது, $f = \{(x,y) |$ ஒவ்வொரு $x \in X$-க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$ இருக்கும்$\}$.



படம் 1.12(i)

X –லிருந்து Y–க்கான சார்பை, $f : X \to Y$ என எழுதலாம்.

படம் 1.12(ii)

உறவு மற்றும் சார்பு ஆகியவற்றை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது ஒவ்வொரு சார்பும் உறவே. எனவே, சார்புகள் உறவின் உட்கணமாகும். உறவுகள் கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாகும். (படம் 1.12(i))

ஒரு சார்பு f ஐ இயந்திரமாகக் கருதினால் (படம் 1.12(ii)) ஒவ்வொரு உள்ளீடு x –ம் ஒரே ஒரு தனிப்பட்ட வெளியீடு $f(x)$ –ஐ கொடுக்கின்றது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

ஒரு சார்பை, தொடர்புபடுத்துதல் அல்லது உருமாற்றம் செய்தல் எனக் கருதலாம்.

குறிப்பு

$f : X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,

- கணம் X ஐ, சார்பு f–ன் மதிப்பகம் என்கிறோம் மற்றும் கணம் Y ஐ, அதன் துணைமதிப்பகம் என்கிறோம்
- $f(a) = b$ –ஆக இருந்தால் சார்பு f–ல் b –ஆனது, a–யின் "நிழல் உரு" எனவும் மற்றும் a ஆனது, b–யின் "முன் உரு" எனவும் அழைக்கிறோம்.
- X–யின் அனைத்து நிழல் உருக்களையும் கொண்ட கணத்தை f–யின் வீச்சகம் என்கிறோம்.
- $f : X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,
  (i) மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
  (ii) ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உருதான் இருக்கும்.
- முடிவுறு கணங்கள் A யிலிருந்து B-க்கு $n(A) = p$, $n(B) = q$ எனில், A மற்றும் B-க்கு இடையேயான மொத்தச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை q^p ஆகும்.
- இந்தப் பாடப்பகுதியில் f என்ற சார்பின் வீச்சகத்தை மெய்யெண்களின் உட்கணமாக நாம் கருதிக்கொள்ளலாம்.
- சார்பின் மதிப்பகத்தை விளக்கும்போது

  (i) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ –யில் $x = -1$ எனில் $f(-1)$ வரையறுக்க முடியாது. எனவே f ஆனது $x = -1$ தவிர அனைத்து மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகின்றது. ஆகையால், f –ன் மதிப்பகமானது $\mathbb{R} - \{-1\}$.

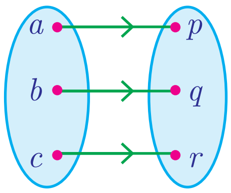
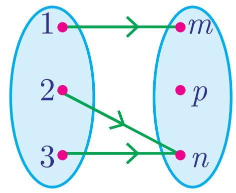
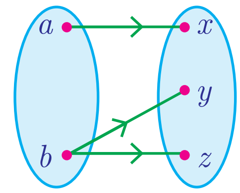
  (ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ –ல் $x = 2, 3$ ஆக இருந்தால், $f(2)$ மற்றும் $f(3)$ –ஐ வரையறுக்க முடியாது. எனவே, f ஐ $x = 2$ மற்றும் 3 தவிர அனைத்து மெய்யெண்களுக்கு வரையறுக்கலாம். ஆகையால், f-யின் மதிப்பகம் $= \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. உறவுகள் _______ ன் உட்கணமாகும். சார்புகள் _______ ன் உட்கணமாகும்.
2. சரியா அல்லது தவறா: ஓர் உறவின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
3. சரியா அல்லது தவறா: ஒரு சார்பின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
4. சரியா அல்லது தவறா: R : $A \to B$ ஆனது ஒரு உறவு எனில், R –ன் மதிப்பகம் A ஆகும்.
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x) = x^2$ –ல் 1 மற்றும் 2 நிழல் உரு(க்கள்) __________ மற்றும் __________
6. உறவிற்கும் சார்பிற்கும் இடையேயான வேறுபாடு என்ன?
7. A மற்றும் B ஆகியவை இரண்டு வெற்றில்லா முடிவுற்ற கணங்கள் என்க. பின்வருவனவற்றுள் எந்தத் தொகுப்பு பெரியதாக இருக்கும்?
   (i) A மற்றும் B –க்கு இடையேயான உறவுகளின் எண்ணிக்கை
   (ii) A மற்றும் B –க்கு இடையேயான சார்புகளின் எண்ணிக்கை

விளக்கம் 9 - சார்புகளுக்கான சோதனை

அம்புக்குறி படத்தில் காணுதல்

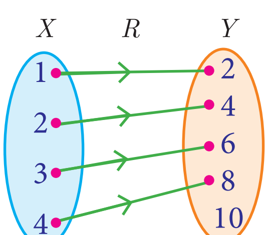
		
இது ஒரு சார்பைக் குறிக்கிறது. ஒவ்வோர் உள்ளீடுக்கும் அது தொடர்பான ஒரே ஒரு வெளியீடு உள்ளது.	இது ஒரு சார்பைக் குறிக்கிறது. ஒவ்வோர் உள்ளீடுக்கும் அது தொடர்பான ஒரே ஒரு வெளியீடு உள்ளது	இது ஒரு சார்பாகாது. காரணம், உள்ளீடு b–க்கு இரண்டு வெளியீடுகள் உள்ளன
படம் 1.13(i)	படம் 1.13(ii)	படம் 1.13(iii)

குறிப்பு

ஒரு சார்பின் வீச்சகமானது அதன் துணை மதிப்பகத்தின் உட்கணமாகும்

கணிதத்தில் உயரிய கோட்பாடுகளைப் புரிந்து கொள்வதில், சார்புகள் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன. சார்புகள் ஒரு வடிவிலிருந்து மற்றொரு வடிவிற்கு மற்றும் அடிப்படைக் கருவியாகிறது. இதனால், பொறியியல் அறிவியலில் சார்புகள் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.6 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{2,4,6,8,10\}$ மற்றும் $\mathrm{R} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ எனில், R ஆனது ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. மேலும் அதன் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க



படம் 1.14

தீர்வு படம் 1.14–ல் R குறிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு $x \in X$ -க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$ உறுப்பு மட்டும் கிடைக்கிறது. எனவே X-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் Y-ல் ஒரே ஒரு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே R-ஆனது ஒரு சார்பு ஆகும்.

மதிப்பகம் $X=\{1,2,3,4\}$; துணை மதிப்பகம் $Y=\{2,4,6,8,10\}$; வீச்சகம் $f=\{2,4,6,8\}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.7 $f{:}X\to Y$ என்ற உறவானது $f(x)=x^2-2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, $X=\{-2,-1,0,3\}$ மற்றும் $Y=\mathrm{R}$ எனக் கொண்டால் (i) f-யின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக. (ii) f -ஒரு சார்பாகுமா?

தீர்வு $f(x)=x^2-2$ இங்கு $X=\{-2,-1,0,3\}$

(i)
$$f(-2) = (-2)^2-2=2\,;\quad f(-1)=(-1)^2-2=-1$$
$$f(0) = (0)^2-2=-2\,;\quad f(3)=(3)^2-2=7$$
$$\therefore\quad f = \{(-2,2),(-1,-1),(0,-2),(3,7)\}$$

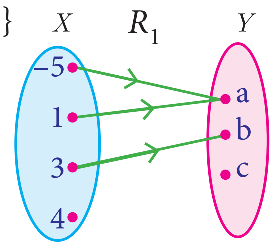
(ii) f-யின் ஒவ்வொரு மதிப்பக உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உரு உள்ளதைக் காணலாம். எனவே f -ஆனது ஒரு சார்பாகும்.

சிந்தனைக் களம்

கோள்களுக்கும் அதன் துணைக்கோள்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு சார்பாகுமா?

X_Ch 1 TM.indd 13 07-02-2020 05:25:22 PM

எடுத்துக்காட்டு 1.8 $X = \{-5,1,3,4\}$ மற்றும் $Y = \{a,b,c\}$ எனில், X-லிருந்து Y-க்கு பின்வரும் உறவுகளில் எவை சார்பாகும்? (i) $R_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$
(ii) $R_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$ (iii) $R_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$



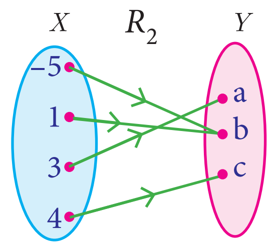
படம் 1.15(i)

தீர்வு

(i) $R_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$

R_1-க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம் (படம் 1.15 (i)).

R_1 சார்பாகாது. காரணம் $4 \in X$ -க்கு Y-ல் நிழல் உரு இல்லை.

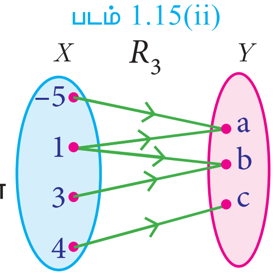


படம் 1.15(ii)

(ii) $R_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$

R_2-க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம் (படம் 1.15 (ii)).

R_2 ஒரு சார்பாகும்.காரணம் X-யின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உரு Y-ல் உள்ளது.



படம் 1.15(iii)

(iii) $R_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$

R_3-க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம் (படம் 1.15 (iii)).

R_3 ஒரு சார்பாகாது. காரணம் $1 \in X$ -க்கு இரண்டு நிழல் உருக்கள் $a \in Y$ மற்றும் $b \in Y$ என உள்ளன.

இவற்றின் மூலம், ஓர் உறுப்பிற்கு, ஒரே ஒரு நிழல் உரு இருந்தால் மட்டுமே அந்த உறவு சார்பாகும் என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.9 $f(x) = 2x - x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,
(i) $f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x) + f(1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு (i) $x = 1$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

(ii) $x = x+1$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 1$$

(iii) $f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$

[$f(x) + f(1) \neq f(x+1)$ என்பதைக் காணலாம். பொதுவாக, $f(a+b)$ ஆனது $f(a) + f(b)$ -க்கு சமமாக இருப்பதில்லை]

பயிற்சி 1.3

1. $f = \{(x,y) \mid x, y \in N$ மற்றும் $y = 2x\}$ ஆனது N –ன் மீதான ஓர் உறவு என்க. மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. இந்த உறவு சார்பாகுமா?

2. $X = \{3, 4, 6, 8\}$ என்க. $R = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ என்ற உறவானது X –லிருந்து $\mathbb{N}$-க்கு ஒரு சார்பாகுமா?

3. கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f : x \to x^2 - 5x + 6$, எனில்,

(i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$ (iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

4. படம் 1.16-ல் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் $f(x)$-யின் மூலமாக, $f(9) = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.

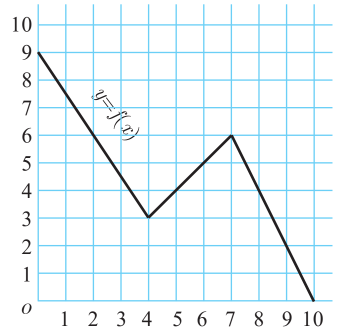
(i) பின்வரும் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்க

(அ) $f(0)$ (ஆ) $f(7)$ (இ) $f(2)$ (ஈ) $f(10)$

(ii) x-இன் எம்மதிப்பிற்கு $f(x) = 1$ ஆக இருக்கும்?

(iii) படம் 1.16 யில் (1) மதிப்பகம் (2) வீச்சகம் காண்க..

(iv) f என்ற சார்பில் 6-ன் நிழல் உரு என்ன?



படம் 1.16

5. $f(x) = 2x+5$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $\dfrac{f(x+2)-f(2)}{x}$ -ஐக் காண்க.

6. ஒரு சார்பு f ஆனது $f(x) = 2x - 3$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

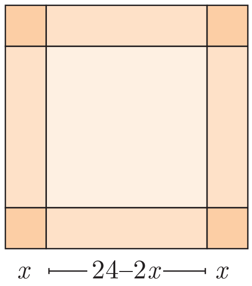
(i) $\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ -ஐக் காண்க.

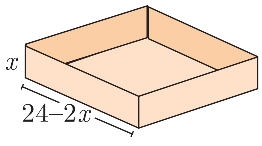
(ii) $f(x) = 0$ எனில், x ஐக் காண்க.

(iii) $f(x) = x$ எனில் x ஐக் காண்க.

(iv) $f(x) = f(1-x)$ எனில் x ஐக் காண்க.

7. 24 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவத் துண்டிலிருந்து நான்கு மூலைகளிலும் சம அளவுள்ள சதுரங்களை வெட்டி படம் 1.17-ல் உள்ளவாறு மேல்புறம் திறந்த ஒரு பெட்டி செய்யப்படுகிறது. இந்தப் பெட்டியின் கன அளவு V எனில், V ஐ x-யின் சார்பாகக் குறிப்பிடுக.





படம் 1.17

8. f என்ற சார்பு $f(x) = 3 - 2x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $f(x^2) = (f(x))^2$ எனில் x-ஐக் காண்க.

9. ஒரு விமானம் 500 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. விமானம் 'd' தொலைவு செல்வதற்கு ஆகும் காலத்தை t (மணியில்) –ன் சார்பாக வெளிப்படுத்துக.

10. அருகில் உள்ள அட்டவணையில் நான்கு நபர்களின் முன்னங்கைகளின் நீளம் மற்றும் அவர்களுடைய உயரங்களின் தகவல்கள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. அந்த விவரங்களின் அடிப்படையில் ஒரு மாணவர், உயரம் (y) மற்றும் முன்னங்கை நீளம் (x)-க்கான உறவை $y = ax + b$ எனக் கண்டுபிடித்தார். இங்கு a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள்.

முன்னங்கைகளின் நீளம் (செ.மீ) 'x'	உயரம் (அங்குலம்) 'y'
35	56
45	65
50	69.5
55	74

(i) இந்த உறவானது சார்பாகுமா என ஆராய்க.

(ii) a மற்றும் b-ஐக் காண்க.

(iii) முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரத்தைக் காண்க.

(iv) உயரம் 53.3 அங்குலம் எனில், அந்த நபரின் முன்னங்கையின் நீளத்தைக் காண்க.

1.6 சார்புகளைக் குறிக்கும் முறை (Representation of Functions)

ஒரு சார்பை

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை முறை

(iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபட முறை

ஆகியவற்றின் மூலமாகக் குறிப்பிடலாம்

$f : A \rightarrow B$ ஒரு சார்பு என்க.

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

$f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ என்றவாறு அமையும் அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக சார்பு f -ஐ குறிக்கலாம்

(ii) அட்டவணை முறை

x-ன் மதிப்புகள் மற்றும் f -ஆல் பெறப்படும் நிழல் உருக்கள் ஆகியவற்றைகொண்டு ஒரு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

(iii) அம்புக்குறி படம்

f-ன் மதிப்பகத்தையும் அதன் நிழல் உருக்களையும் அம்புக்குறி மூலம் தொடர்புபடுத்திக் காட்டலாம்.

(iv) வரைபடம்

$f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ -ல் உள்ள அனைத்து வரிசைச் சோடிகளை XY தளத்தில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கும் படம் f -ன் வரைபடமாகும்.

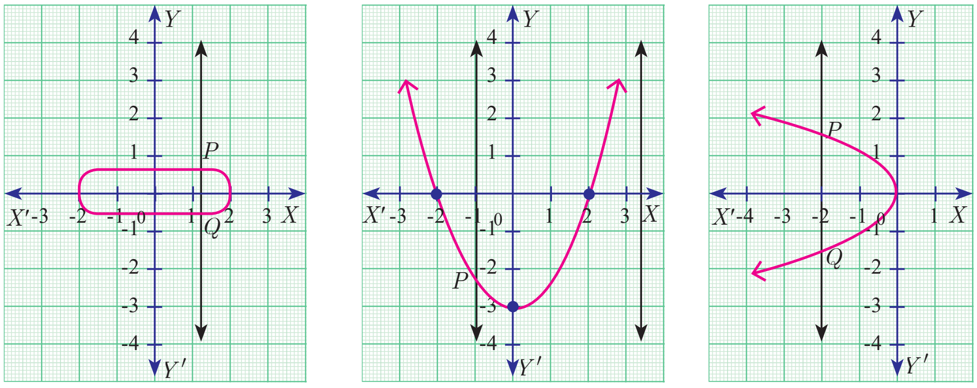
ஒவ்வொரு சார்பையும், ஒரு வளைவரையாக (curve) வரைபடத்தில் குறிப்பிடலாம். ஆனால் வரைபடத்தில் வரையப்படும் அனைத்து வளைவரைகளும் சார்பாகாது.

ஒரு வளைவரை சார்பாகுமா என்பதைத் தீர்மானிக்க, பின்வரும் சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம்.

1.6.1 குத்துக்கோட்டுச் சோதனை (Vertical line test)

ஒரு வளைவரையை, ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால், அவ்வளைவரை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

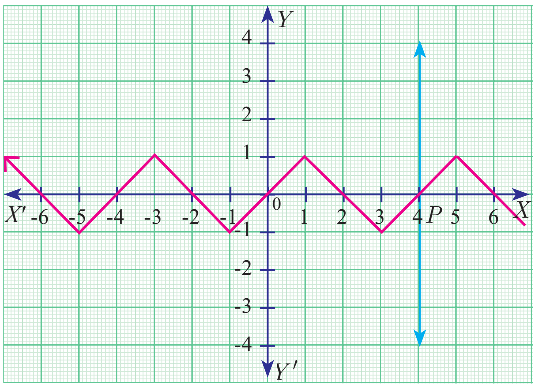
எடுத்துக்காட்டு 1.10 குத்துக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனத் தீர்மானிக்கவும். (படம்.1.18 (i), 1.18 (ii), 1.18 (iii), 1.18 (iv))



படம் 1.18(i) படம் 1.18(ii) படம் 1.18(iii)

தீர்வு படம்.1.18 (i) மற்றும் படம் 1.18 (iii) வரைபடங்களில், ஒரு குத்துக்கோடு, வரைபடத்தை P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால் இவை ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

1.18 (ii) மற்றும் படம்.1.18 (iv) வரைபடங்களில் அதிகபட்சமாக ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இவை சார்பினைக் குறிக்கும்.



படம் 1.18(iv)

குறிப்பு

ஒரு சமன்பாடு வரைபடத்தில் குறிக்கப்படும்போது அதை **வளைவரை** எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11 $A = \{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B = \{2,5,8,11,14\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $f : A \to B$ எனும் சார்பு $f(x) = 3x - 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சார்பினைக் கொண்டு

(i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை

(iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றைக் குறிக்க

தீர்வு

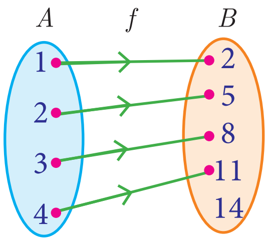
$A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{2,5,8,11,14\}$; $f(x) = 3x - 1$

$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$; $f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$

$f(3) = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$; $f(4) = 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$

(i) அம்புக்குறி படம்

சார்பு $f : A \to B$ - ஐ அம்புக்குறி படத்தால் குறிப்போம் (படம்.1.19).



படம் 1.19

(ii) அட்டவணை அமைப்பு

சார்பு f-ஐ கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையால் குறிப்போம்

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11

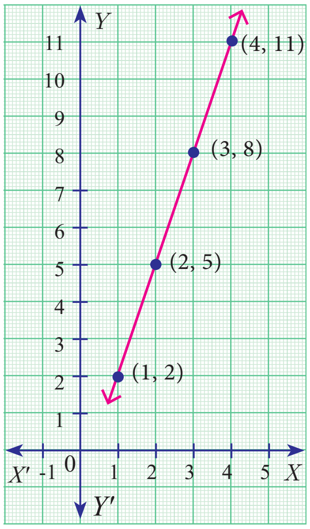
(iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

சார்பு f –ஐ வரிசை சோடிகளின் கணமாக எழுதலாம்.

$f = \{(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)\}$

(iv) வரைபடம்

படம் 1.20–ல் உள்ள XY- தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டில் $(1,2)$, $(2,5)$, $(3,8)$, $(4,11)$ ஆகிய புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 1.20

1.7 சார்புகளின் வகைகள் (Types of Functions)

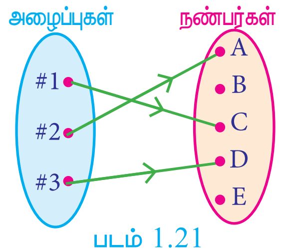
இந்தப் பகுதியில் கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் வகைகளைப் பற்றி தகுந்த எடுத்துக்காட்டுடன் காணலாம்.

(i) ஒன்றுக்கு – ஒன்றான (one – one) (ii) பலவற்றிற்கு – ஒன்று (many – one)

(iii) மேல் (onto) (iv) உள்நோக்கிய (into)

1.7.1 ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (One – one function)

நம்மிடம் நன்கு வேலை செய்யும் அலைபேசி ஒன்று உள்ளது எனக் கொள்க. உங்கள் நண்பனுக்கு ஒரு சாதாரணத் தொடர்பின் மூலம் பேசுவதற்கு ஒரு நேரத்தில், ஒரு முறை தான் தொடர்பு கொள்ள முடியும். (படம் 1.21)



படம் 1.21

நாம் பேசுவதற்குத் தொடர்பு கொள்ளும் எண்ணை ஒரு சார்பாகக் கொண்டால், அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் கூறலாம்.

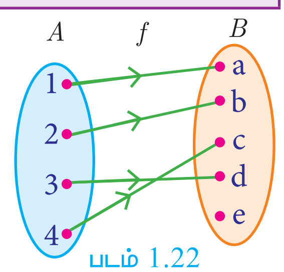
$f : A \to B$ என்பது ஒரு சார்பு என்க. A-யின் வெவ்வேறான உறுப்புகளை B-ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துமானால், f என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும்.

ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு என்பது ஒருபுறச் சார்பு (Injective function) எனவும் அழைக்கப்படும். இதற்குச் சமமாக,

$f(a_1) = f(a_2)$ என்றவாறு அமைந்த ஒவ்வொரு $a_1, a_2 \in A$ -க்கும் $a_1 = a_2$ எனக் கிடைத்தால், f என்பது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

விளக்கம் 10

$A = \{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B = \{a,b,c,d,e\}$

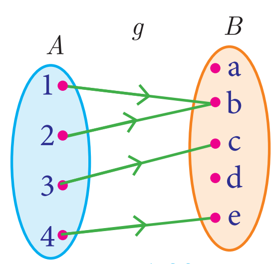


படம் 1.22

(i) $f = \{(1,a), (2,b), (3,d), (4,c)\}$ எனில், படம் 1.22–ல் A-யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B–ல் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன.

எனவே f ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

(ii) $g = \{(1,b), (2,b), (3,c), (4,e)\}$

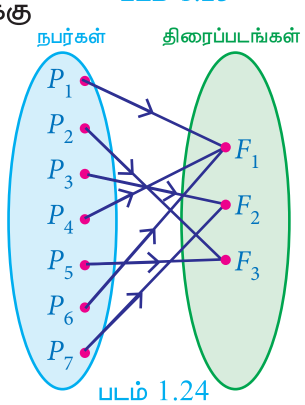


படம் 1.23

படம் 1.23 –ல் g ஆனது A-விலிருந்து B -க்கு ஒரு சார்பு. மேலும் $g(1) = g(2) = b$, ஆனால் $1 \neq 2$. எனவே, கணம் A-ல் 1 மற்றும் 2 ஆகிய இரண்டு வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்குக் கணம் B-ல் 'b' என்ற ஒரே ஒரு நிழல் உருதான் உள்ளது. எனவே g ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.

1.7.2 பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு (Many – one function)

ஒரு திரையரங்க வளாகத்தில் F_1, F_2, F_3 என்ற மூன்று திரைப்படங்கள் திரையிடப்படுகின்றன. ஏழு நபர்கள் (P_1 –லிருந்து P_7 வரை) திரையரங்கிற்கு வந்து காட்சி சீட்டு வாங்கும் விதம் (படம்.1.24)–ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 1.24

நாம் திரைப்படத்தைத் தேர்வு செய்வதை ஓர் உறவாகக் கொண்டால் அது பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பாக விளங்கும். காரணம் ஒருவருக்கு ஒரு காட்சிச் சீட்டு மட்டுமே கொடுக்கப்படும், ஆனால் ஒரே படத்தைப் பார்க்க பலர் தேர்வு செய்யலாம்.

சார்பு $f : A \to B$ -ஐ பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு எனில், அச்சார்பில் A-யின் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு, B-ல் ஒரே நிழல் உரு இருக்கும்.

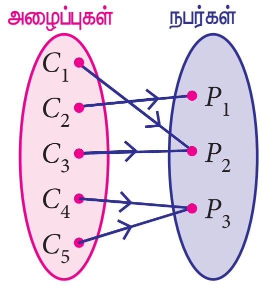
$f : A \to B$ எனும் சார்பில், f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றாக இல்லையெனில், அது பலவற்றிக்கு ஒன்று எனக் கூறலாம்.

விளக்கம் 11

$A = \{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B = \{a,b,c\}$ என்க. $f = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,c)\}$ என்க.

f என்ற சார்பில் 1 மற்றும் 2 என்ற, A-யில் உள்ள உறுப்புகளுக்கு B -யில் ஒரே நிழல் உரு 'a' ஆக இருப்பதால், சார்பு f ஆனது பலவற்றிற்கு–ஒன்றான சார்பாகும்.

1.7.3 மேல் சார்பு (Onto function)



படம் 1.25

ஒரு கைபேசியில் மூன்று நபர்களின் பெயர்கள் பதிவில் உள்ளன எனக் கொள்க. பதிவில் உள்ள மூவருக்கும் அழைப்புகள் செல்கின்றன எனில், அந்த அழைப்புகளை குறிக்கும் சார்பு மேல் சார்பு (படம் 1.25) ஆகும்.

$f : A \to B$ என்ற ஒரு சார்பு, மேல் சார்பு எனில், f -யின் வீச்சகமானது, f-யின் துணை மதிப்பகத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

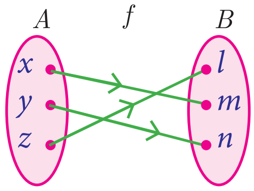
துணை மதிப்பகம் B-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் மதிப்பகம் A-ல் முன் உரு இருக்கும் எனவும் கூறலாம்.

இதை மேல்புறச் சார்பு (Surjective function) எனவும் அழைக்கலாம்.

குறிப்பு

$f : A \to B$ ஆனது மேல் சார்பு எனில், f-யின் வீச்சகம் $= B$.

விளக்கம் 12

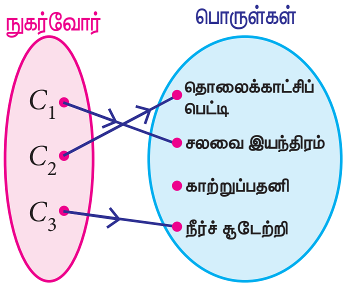


படம் 1.26

$A = \{x,y,z\}, B = \{l,m,n\}$ என்க.

f -ன் வீச்சகம் $= \{l,m,n\} = B$ (படம்.1.26) எனவே, f ஆனது ஒரு மேல்சார்பாகும்.

1.7.4 உட்சார்பு (Into function)



படம் 1.27

ஒரு வீட்டு உபயோகப் பொருள்கள் விற்பனையகத்தில். புது வருட விற்பனைக்காக, தொலைக்காட்சிப் பெட்டி, காற்று பதனி (Air Conditioner), சலவை இயந்திரம் (Washing machine) மற்றும் நீர்ச் சூடேற்றி (Water heater) ஆகியவற்றிற்கு 20% தள்ளுபடி செய்து சலுகை வழங்கியுள்ளது. மேற்கண்ட பொருள்களை C_1, C_2, C_3 என்ற மூன்று நுகர்வோர் தேர்வு செய்வதாக எடுத்துக்கொண்டால், அதை ஒரு சார்பாகக் கொள்ளலாம். (படம் 1.27) மேலும், இது உட்சார்பைக் குறிக்கின்றது.

சாதாரணமாக, குளிர் காலத்தில் நுகர்வோர் காற்று பதனியை தேர்வு செய்யமாட்டார்கள். எனவே, இது உட்சார்புக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

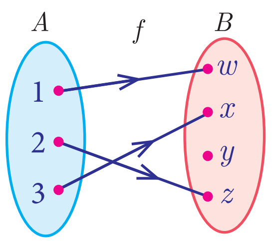
ஒரு சார்பு $f : A \to B$ ஆனது உட்சார்பு எனில், B–ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பிற்காவது, A–ல் முன்உரு இருக்காது.

f-ன் வீச்சகமானது துணை மதிப்பகத்தின் தகு உட்கணமாகும்.

எனவே, $f : A \to B$ ஆனது மேல்சார்பு இல்லையெனில் அது உட்சார்பாகும்.

விளக்கம் 13

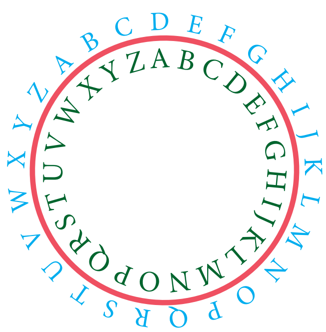
$A = \{1,2,3\}$ மற்றும் $B = \{w,x,y,z\}$ என்க. சார்பு $f = \{(1,w),(2,z),(3,x)\}$ என்க.



படம் 1.28

இங்கு, f-ன் வீச்சகம் $f = \{w,\ x,\ z\} \subset B$ (படம்.1.28) என்பதால், f ஆனது உட்சார்பு ஆகும். $y \in B$ -க்கு முன் உரு A-ல் இல்லை என்பதை நோக்குக.

1.7.5 இருபுறச் சார்பு (Bijection)



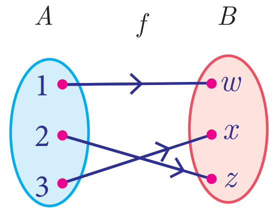
குறியீட்டு வட்டம்

படம் 1.29

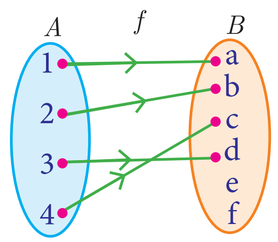
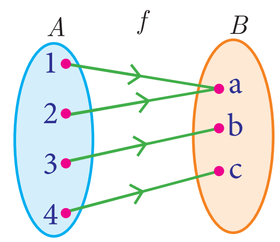
ஒரு வட்டத்தைப் படம் 1.29–ல் உள்ளபடி எடுத்துக்கொண்டால், வட்டத்தின் உட்பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு ஆங்கில எழுத்திற்கும் மற்றொரு ஆங்கில எழுத்து அதன் வெளிப்புறத்தில் மாற்றி அமைக்கப்பட்டுள்ளதைக் காணலாம். எனவே $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$, $\ldots\ Z \to C$. இந்த வட்டத்தைக் குறியீட்டு வட்டம் (Cipher circle) என்கிறோம். இதை வைத்து, நாம் 'HELLO' என்ற வார்த்தையை 'KHOOR' என மாற்றம் செய்கிறோம். இதே வட்டத்தைப் பயன்படுத்தி வெளியே உள்ள எழுத்திற்குப் பதிலாகத் திரும்பவும் உள்ளே உள்ள எழுத்தை மாற்றுகின்றோம் எனில், 'KHOOR' என்ற வார்த்தை மீண்டும் 'HELLO'–வாக கிடைத்துவிடும். இத்தகைய நிகழ்ச்சியைத் தான் இருபுறச் சார்பு என்கிறோம். இவ்விதமான இரகசியக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவதற்கான முறையை குழுக் குறியியல் (Cryptography) என்கிறோம்.

$f : A \to B$ என்ற சார்பு, ஒன்றுக்கு ஒன்றாகவும் மற்றும் மேல்சார்பாகவும் இருந்தால் f –ஐ A-லிருந்து B-க்கான இருபுறச் சார்பு என்கிறோம்.

விளக்கம் 14

ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல்சார்பு (இருபுறச் சார்பு)	
 படம் 1.30	A -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B-ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது மற்றும் B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் A-ல் முன் உரு உள்ளது.

விளக்கம் 15

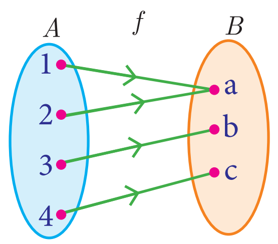
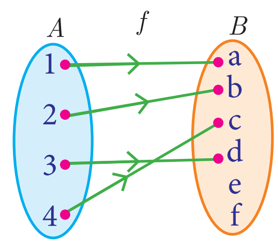
ஒன்றுக்கு ஒன்றான	பலவற்றிற்கு ஒன்றான
 படம் 1.31	 படம் 1.32
A -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B-ல் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன.	A -யின் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு ஒரே நிழல் உரு B-ல் உள்ளது.

குறிப்பு

ஒரு சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாக இருந்தால் நாம் அதை ஒன்றுக்கு ஒன்றான தொடர்பு எனவும் கூறலாம்.

சிந்தனைக்களம்

ஒன்றிற்குப் பல என்ற சார்பு இருக்க முடியுமா?

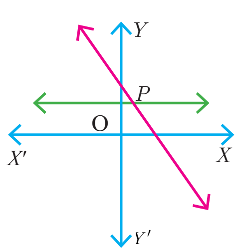
மேல்சார்பு	உட்சார்பு
 படம் 1.33	 படம் 1.34
A -யின் வீச்சகம் =துணை மதிப்பகம் (B-யின் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் A-ல் முன் உரு உள்ளது).	A -யின் வீச்சகமானது துணை மதிப்பகத்தின் தகு உட்கணமாகும். (B-யின் ஓர் உறுப்பாவது A-யில் முன் உருவை பெற்றிருக்கவில்லை)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றா அல்லது இல்லையா என அறிவதற்குக் கீழ்க்காணும் சோதனை நமக்குப் பயன்படும்.

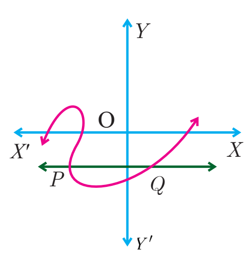
1.7.6 கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனை (Horizontal Line Test)

இதற்கு முன்னர் நாம் குத்துக் கோட்டுச் சோதனையைப் பார்த்தோம். தற்போது கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனையைப் பார்க்கலாம். "வளைவரை ஒன்றுக்கொன்றான சார்பைக் குறித்தால், வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையை அதிகபட்சமாக ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டும்".

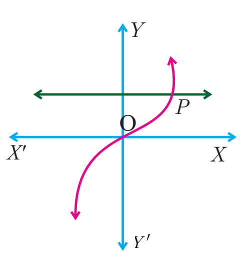
எடுத்துக்காட்டு 1.12 கிடைமட்டக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்தி (படம் 1.35 (i), (1.35 (ii), 1.35 (iii)), கீழ்க்கண்ட சார்புகளில் எவை ஒன்றுக்கொன்றானவை எனக் காண்க.



படம் 1.35(i)



படம் 1.35(ii)



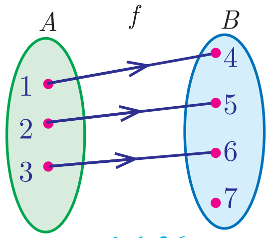
படம் 1.35 (iii)

தீர்வு ஒரு கிடைமட்டக்கோடு, வரைபடம் 1.35 (i) மற்றும் படம் 1.35 (iii) ஆகியவற்றை அதிகபட்சமாக ஒரே ஒரு புள்ளியில் P வெட்டுவதால் இவை ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பினைக் குறிக்கும்.

வரைபடம் (1.35 (ii))–ல் வரையப்பட்ட ஒரு கிடைமட்டக்கோடு P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பைக் குறிக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 1.13 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ மற்றும் $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ ஆனது A-லிருந்து B-க்கான சார்பு ஆகும். f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆனால் மேல்சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

தீர்வு $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$; $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$



படம் 1.36

A-லிருந்து B-க்கு ஆன சார்பு f-ல், A-யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு, B-ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே, f ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும். துணை மதிப்பகத்தில் உள்ள உறுப்பு 7-க்கு, மதிப்பகத்தில் முன் உரு இல்லை. எனவே, f ஆனது, மேல்சார்பு இல்லை. (படம்.1.36)

எனவே, f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானது, ஆனால் மேல்சார்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.14 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ மற்றும் $f:A\to B$ என்ற சார்பானது $f(x)=x^2+x+1$ மேல் சார்பு எனில், B-ஐ காண்க.

தீர்வு $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ மற்றும் $f(x)=x^2+x+1$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=3;\qquad f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$$
$$f(0)=0^2+0+1=1;\qquad f(1)=1^2+1+1=3$$
$$f(2)=2^2+2+1=7$$

எனவே, f –ன் வீச்சகம் $B=\{1,3,7\}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.15 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்றசார்பானது $f(x)=3x+2,\ x\in\mathbb{N}$ எனவரையறுக்கப்பட்டால்

(i) 1, 2, 3 -யின் நிழல் உருக்களைக் காண்க

(ii) 29 மற்றும் 53-யின் முன் உருக்களைக் காண்க. (iii) சார்பின் வகையைக் காண்க.

தீர்வு $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்ற சார்பானது $f(x)=3x+2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $x=1$ எனில், $f(1)=3(1)+2=5$

$x=2$ எனில், $f(2)=3(2)+2=8$

$x=3$ எனில், $f(3)=3(3)+2=11$

1, 2, 3 –யின் நிழல் உருக்கள் முறையே 5, 8, 11 ஆகும்.

(ii) 29-யின் முன் உரு x எனில், $f(x)=29$. எனவே $3x+2=29$

$3x=27\Rightarrow x=9$.

இதைப்போலவே, 53 -ன் முன் உரு x எனில், $f(x)=53$. எனவே, $3x+2=53$

$3x=51\Rightarrow x=17$.

எனவே, 29 மற்றும் 53 -யின் முன் உருக்கள் முறையே 9 மற்றும் 17 ஆகும்.

(iii) $\mathbb{N}$-யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்குத் துணை மதிப்பகத்தில் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன. எனவே, f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

f -யின் துணை மதிப்பகமானது $\mathbb{N}$.

வீச்சகம் $f=\{5,8,11,14,17,\ldots\}$ ஆனது $\mathbb{N}$-ன் தகு உட்கணமாகும்.

எனவே, f ஆனது மேல்சார்பு இல்லை.

அதாவது, f உட்சார்பு ஆகும்.

எனவே, f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் உட்சார்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.16 தடயவியல் விஞ்ஞானிகள், தொடை எலும்புகளைக் கொண்டு ஒருவருடைய உயரத்தை (செ.மீட்டரில்) கணக்கிடுகிறார்கள். அவர்கள் பொதுவாக, $h(b) = 2\cdot47b + 54\cdot10$ என்ற சார்பை இதற்குப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இங்கு, b ஆனது தொடை எலும்பின் நீளமாகும்.

(i) h ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சரிபார்க்க.

(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் 50 செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரத்தைக் காண்க.

(iii) நபரின் உயரம் 147.96 செ.மீ எனில், அவர் தொடை எலும்பின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு (i) h ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சோதிக்க $h(b_1) = h(b_2)$ எனக் கருதுக.

எனவே, நமக்குக் கிடைப்பது,, $2\cdot47b_1 + 54\cdot10 = 2\cdot47b_2 + 54\cdot10$

$$2\cdot47b_1 = 2\cdot47b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

எனவே, $h(b_1) = h(b_2)$ எனில், $b_1 = b_2$ ஆகையால், இந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் $b = 50$ செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரமானது $h(50) = (2\cdot47\times50) + 54\cdot10 = 177\cdot6$ செ.மீ ஆகும்.

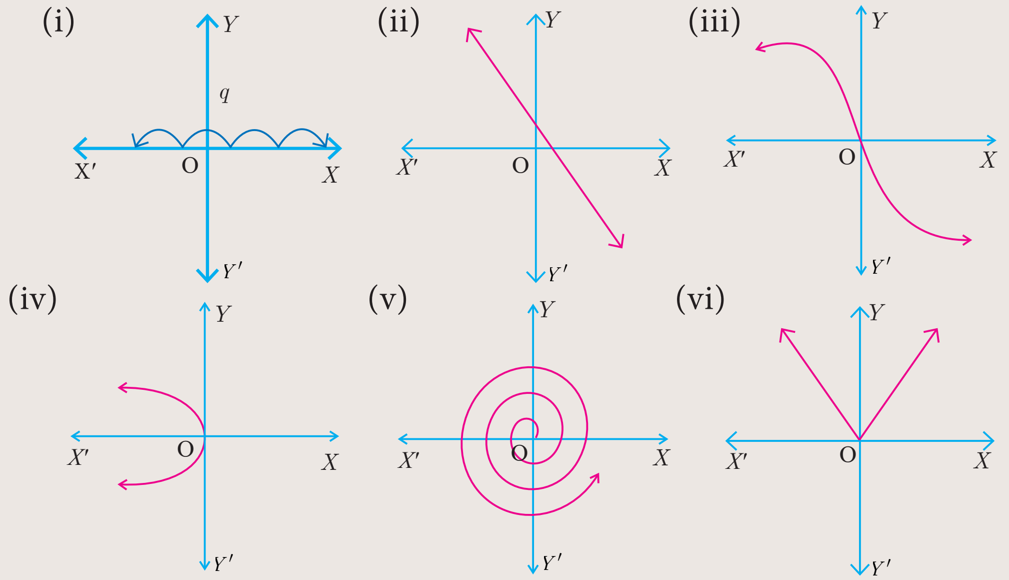
(iii) நபரின் உயரம் 147.96 செ.மீ எனில், $h(b) = 147\cdot96$ தொடை எலும்பின் நீளமானது $2\cdot47b + 54\cdot10 = 147\cdot96$

$$b = \frac{93\cdot86}{2\cdot47} = 38$$

ஆகையால், தொடை எலும்பின் நீளமானது 38 செ.மீ ஆகும்.

செயல்பாடு 3

பின்வரும் வளைவரைகளில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனச் சோதிக்க. சார்பாக இருந்தால் அந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனப் பரிசோதிக்க. (குறிப்பு: குத்துக்கோடு, மற்றும் கிடைமட்டக்கோடு சோதனைகளைப் பயன்படுத்துக)



1.8 சார்புகளின் சிறப்பு வகைகள் (Special cases of function)

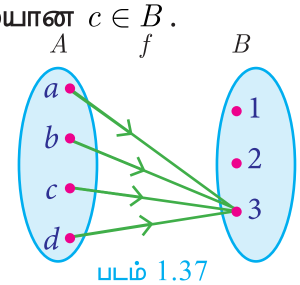
சில சிறப்பு வகையான சார்புகள் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். அவற்றுள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) மாறிலிச் சார்பு (ii) சமனிச் சார்பு (iii) மெய் மதிப்புச் சார்பு

(i) மாறிலிச் சார்பு (Constant function)

சார்பு $f : A \to B$ ஆனது **மாறிலிச் சார்பு** எனில், f -ன் வீச்சகமானது ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்டதாகும். அதாவது, $f\left(x\right) = c$, $\forall\ x \in A$ மற்றும் ஏதேனும் ஒரு நிலையான $c \in B$.

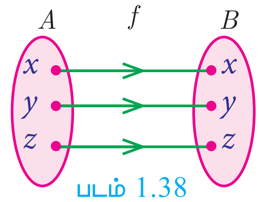
விளக்கம் 16



படம் 1.37

படம் 1.37-லிருந்து, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ மற்றும் $f = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$ இதை, $f(x) = 3\ \forall\ x \in A$ என எழுதலாம். மேலும், f-யின் வீச்சகம் $f = \{3\}$. எனவே f-ஆனது மாறிலிச் சார்பு ஆகும்.

(ii) சமனிச் சார்பு (Identity function)



படம் 1.38

A ஒரு வெற்றில்லா கணம் என்க. சார்பு $f : A \to A$ ஆனது $f(x) = x$ அனைத்து $x \in A$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அந்தச் சார்பு A-யின் **சமனிச் சார்பு** எனப்படும். இதை I_A எனக் குறிக்கலாம்.

விளக்கம் 17

$A = \left\{a, b, c\right\}$ எனில் $f = I_A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ ஆனது A-யின் மீதான சமனிச் சார்பாகும்

சிந்தனைக் களம்

சமனிச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா?

(iii) மெய் மதிப்புச் சார்பு (Real – valued function)

சார்பு $f : A \to B$ ஆனது **மெய் மதிப்புச் சார்பு** எனில், f-யின் வீச்சகமானது, R எனும் மெய்யெண்களின் உட்கணமாக இருக்கும். அதாவது, $f(a) \subseteq \mathbb{R}$, இங்கு $\forall\ f(a) \subseteq \mathbb{R}$ ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

சரியா அல்லது தவறா?

1. எல்லா ஒன்றுக்கு ஒன்று சார்புகளும் மேல் சார்பாகும்.
2. $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ ஆக இருக்கும்போது A-லிருந்து B க்கு அமையும் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்காது.
3. எல்லா மேல்சார்புகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்புகளாகும்.
4. $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ ஆக இருக்கும்போது A-யிலிருந்து B-க்கான சார்பு மேல் சார்பாக இருக்க முடியாது.
5. A-லிருந்து B-க்கான சார்பு f ஆனது, ஓர் இருபுறச் சார்பு எனில், $n(A) = n(B)$
6. $n(A) = n(B)$ எனில் f ஆனது, A-யிலிருந்து B-க்கு ஓர் இருபுறச்சார்பு .
7. எல்லா மாறிலிச் சார்புகளும் இருபுறச் சார்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17 f ஆனது $\mathbb{R}$-லிருந்து $\mathbb{R}$-க்கு ஆன சார்பு. மேலும் அது $f(x) = 3x - 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $(a, 4)$ மற்றும் $(1, b)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் a மற்றும் b -யின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு $f(x) = 3x - 5$, $f = \left\{(x,\ 3x - 5) \mid x \in R\right\}$ என எழுதலாம்.

$(a, 4)$ எனில், a-யின் நிழல் உரு 4. அதாவது, $f(a) = 4$

$3a - 5 = 4$ -லிருந்து $a = 3$

$(1, b)$ எனில், 1 -யின் நிழல் உரு b. அதாவது, $f(1) = b$

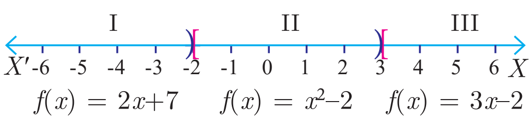
$3(1) - 5 = b$ எனவே, $b = -2$

எடுத்துக்காட்டு 1.18 சார்பு $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = \begin{cases} 2x + 7; & x < -2 \\ x^2 - 2; & -2 \le x < 3 \\ 3x - 2; & x \ge 3 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்,

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 1.39

அருகில் காட்டியுள்ளபடி சார்பு f ஆனது I, II, III என்ற மூன்று இடைவெளிகளில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = a$, என்ற கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கு a-இருக்கும் இடைவெளியைக் கண்டுபிடித்து, அந்த இடைவெளியில் $f(a)$ -ஐக் காண வேண்டும்.

(i) $x = 4$ ஆனது மூன்றாவது இடைவெளியில் உள்ளதை நாம் காணலாம்.

இங்கு, $f(x) = 3x - 2$; $f(4) = 3(4) - 2 = 10$

(ii) $x = -2$ ஆனது இரண்டாவது இடைவெளியில் உள்ளது.

எனவே, $f(x) = x^2 - 2$; $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$

(iii) (i) -லிருந்து, $f(4) = 10$.

$f(1)$ –ன் மதிப்பைக் காண, $x = 1$ ஆனது இரண்டாவது இடைவெளியில் உள்ளது.

ஆகையினால், $f(x) = x^2 - 2$ -லிருந்து, $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

எனவே, $f(4) + 2f(1) = 10 + 2(-1) = 8$

(iv) $f(1) = -1$, $f(4) = 10$ எனக் கண்டோம். $f(-3)$-யைக் காண $x = -3$ ஆனது ஒன்றாவது இடைவெளியில் உள்ளதைக் காணலாம்.

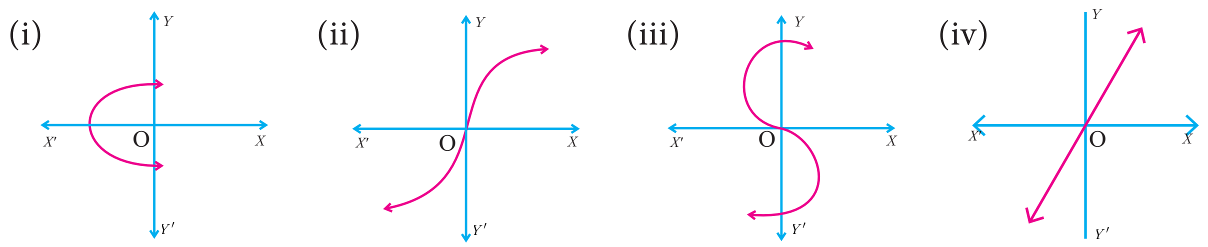
ஆகையினால், $f(x) = 2x + 7$; எனவே, $f(-3) = 2(-3) + 7 = 1$

எனவே, $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} = \dfrac{-1 - 3(10)}{1} = -31$

X_Ch 1 TM.indd 25 07-02-2020 05:25:40 PM

பயிற்சி 1.4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனத் தீர்மானிக்கவும். விடைகளுக்கான காரணத்தையும் கொடுக்கவும்..



2. $f : A \to B$ என்ற சார்பானது $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, $A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$ ஆக இருக்கும்போது சார்பு f-ஐ பின்வரும் முறைகளில் குறிக்க
(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை (iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபடம்

3. $f = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3),(5,4)\}$ என்ற சார்பினை
(i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை (iii) வரைபடம் மூலமாகக் குறிக்கவும்.

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஆனால் மேல் சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(m) = m^2 + m + 3$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் காட்டுக.

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \mathbb{N}$ என்க. மேலும் $f : A \to B$ ஆனது $f(x) = x^3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், (i) f–யின் வீச்சகத்தைக் காண்க. (ii) f எவ்வகை சார்பு எனக் காண்க.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சார்பும் இருபுறச் சார்பா, இல்லையா? உன் விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = 3 - 4x^2$

8. $A = \{-1, 1\}$ மற்றும் $B = \{0, 2\}$ என்க. மேலும், $f : A \to B$ ஆனது $f(x) = ax + b$ என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு எனில், a மற்றும் b -ஐக் காண்க.

9. f என்ற சார்பானது $f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; \quad x > 1 \\ 2 & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ x - 1 & ; \quad -3 < x < -1 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்
(i) $f(3)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(-1 \cdot 5)$ (iv) $f(2) + f(-2)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

10. $f : [-5, 9] \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது
$f(x) = \begin{cases} 6x + 1 & ; \quad -5 \le x < 2 \\ 5x^2 - 1 & ; \quad 2 \le x < 6 \\ 3x - 4 & ; \quad 6 \le x \le 9 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $f(-3) + f(2)$ (ii) $f(7) - f(1)$ (iii) $2f(4) + f(8)$ (iv) $\frac{2f(-2) - f(6)}{f(4) + f(-2)}$

11. புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக t வினாடிகளில் ஒரு பொருள் கடக்கும் தூரமானது $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு a, b ஆகியவை மாறிலிகள் (g ஆனது புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம்). $S(t)$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா என ஆராய்க.

12. t என்ற சார்பானது செல்சியஸில் (C) உள்ள வெப்பநிலையையும், பாரன்ஹீட்டில் (F) உள்ள வெப்பநிலையையும் இணைக்கும் சார்பாகும். மேலும் அது $t(C)=F$ என வரையறுக்கப்பட்டால், (இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$).

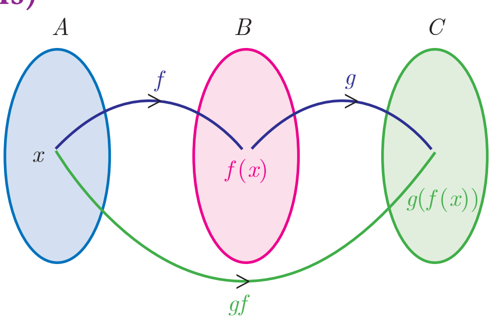
(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$

(iv) $t(C)=212$ ஆக இருக்கும்போது C -ன் மதிப்பு

(v) செல்சியஸ் மதிப்பும் பாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும்போது வெப்பநிலை ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

1.9 சார்புகளின் சேர்ப்பு (Composition of Functions)

ஓர் ஓட்டுநர், மகிழுந்தின் வேகத்தை கட்டுப்படுத்தும் போது எரிபொருள் பாயும் அளவு குறைந்து மகிழுந்தின் வேகத்தில் மாற்றம் ஏற்படுகின்றது. இதைப்போலவே இரண்டு சார்புகளின் சேர்ப்பு ஒரு 'தொடர் விளைவை' ஏற்படுத்தும் செயலாகும். அதாவது இங்குச் சார்புகள் ஒன்றிற்குப் பிறகு ஒன்றாகச் செயல்படுத்தப்படுகிறது. (படம் 1.40)



படம் 1.40

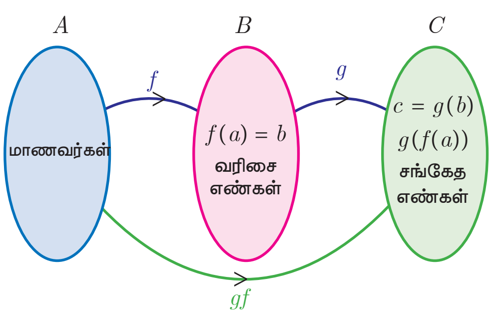
இதை மேலும் விவரிக்க வேண்டுமென்றால், சார்பானது ஒரு நிகழ்வாகும். f மற்றும் g ஆனது இரண்டு சார்புகள் எனில், சார்புகளின் சேர்ப்பு $g(f(x))$ பின்வருமாறு இருநிலைகள் மூலம் காணலாம்.

(i) f-க்கு x என்ற உள்ளீட்டை வழங்குக;

(ii) $f(x)$ என்ற f -யின் வெளியீட்டை g -யின் உள்ளீடாகச் செலுத்துக. வெளியீடை $g(f(x))$ என அழைக்கிறோம்

விளக்கம்

10-ஆம் வகுப்பு பொதுத் தேர்வு எழுதிய மாணவர்களைக் கொண்ட கணம் A என எடுத்துக்கொள்ளலாம். பொதுத்தேர்வு எழுதும் ஒவ்வொரு மாணவருக்கும் வரிசை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தேர்வுத் துறை ரகசியமாக, அந்த வரிசை எண்ணிற்குப் பதிலாகச் சங்கேத எண்ணைக் கொடுத்துள்ளது.



படம் 1.41

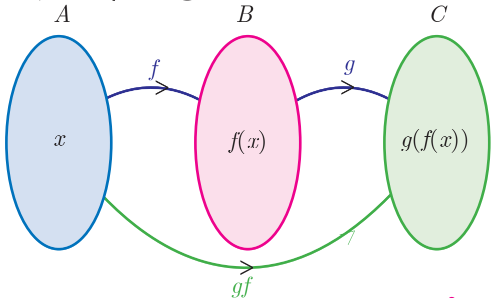
A என்ற கணமானது பொதுத்தேர்வு எழுதும் மாணவர்களின் கணமாகும். $B\subseteq\mathbb{N}$ என்பது வரிசை எண்களின் கணம் மற்றும் $C\subseteq\mathbb{N}$ என்பது சங்கேத எண்களின் (Code number) கணம் என்க. படம் 1.41–ன் இதன் மூலம் இரண்டு சார்புகள் $f:A\to B$ மற்றும் $g:B\to C$ கிடைக்கப் பெறுகின்றன. $b=f(a)$ ஆனது மாணவர் a-க்கு கொடுக்கப்பட்ட வரிசை எண் ஆகும். $c=g(b)$ ஆனது வரிசை

எண்ணிற்குக் கொடுக்கப்பட்ட சங்கேத எண் எனவும் கொள்க. இங்கு $a \in A$, $b \in B$ மற்றும் $c \in C$. இதை $c = g(b) = g(f(a))$ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே, f, g ஆகிய இரண்டு சார்புகளின் சேர்ப்பினால் மாணவர் சங்கேத எண்ணுடன் இணைக்கப்படுகிறார். இதிலிருந்து கிடைப்பதே பின்வரும் வரையறையாகும்.

வரையறை

$f : A \to B$ மற்றும் $g : B \to C$ ஆகியன இரண்டு சார்புகள் எனில், (படம் 1.42) f மற்றும் g –ன் சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f$ -ஐ $g \circ f(x) = g(f(x))\ \forall\ x \in A$ என வரையறுக்கலாம்.



படம் 1.42

எடுத்துக்காட்டு 1.19 $f(x) = 2x+1$ மற்றும் $g(x) = x^2 - 2$ எனில், $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ –ஐ காண்க.

தீர்வு $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2 - 2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2-2) = 2(x^2-2)+1 = 2x^2-3$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 2 = 4x^2+4x-1$$

எனவே $f \circ g = 2x^2 - 3$, $g \circ f = 4x^2+4x-1$. மேற்கண்டவற்றிலிருந்து $f \circ g \neq g \circ f$. என அறிகிறோம்.

சிந்தனைக் களம்

$f(x) = x^m$ மற்றும் $g(x) = x^n$ எனில், $f \circ g = g \circ f$?

குறிப்பு

பொதுவாக, ஏதேனும் இரு சார்புகள் f மற்றும் g-க்கு, $f \circ g \neq g \circ f$ ஆகும். எனவே சார்புகளின் சேர்ப்புச் செயலி பரிமாற்று விதியைப் பூர்த்தி செய்வதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.20 $f(x) = \sqrt{2x^2-5x+3}$ –ஐ இரு சார்புகளின் சேர்ப்பாகக் குறிக்க.

தீர்வு $f_2(x) = 2x^2-5x+3$ மற்றும் $f_1(x) = \sqrt{x}$ என வரையறுப்போம்.

எனவே,
$$f(x) = \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{f_2(x)}$$
$$= f_1\left[f_2(x)\right] = f_1 f_2(x)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.21 If $f(x) = 3x-2$, $g(x) = 2x+k$ மற்றும் $f \circ g = g \circ f$ எனில், k யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $f(x) = 3x-2$, $g(x) = 2x+k$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+k) = 3(2x+k)-2 = 6x+3k-2$$

எனவே, $f \circ g(x) = 6x+3k-2$.

$$g \circ f(x) = g(3x-2) = 2(3x-2)+k$$

எனவே, $g \circ f(x) = 6x-4+k$.

$f \circ g = g \circ f$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$6x+3k-2 = 6x-4+k$$
$$6x-6x+3k-k = -4+2 \Rightarrow 2\ k = -2 \Rightarrow k = -1$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா? மதிப்பகம் g –யின் உட்கணமாக, g –யின் வீச்சகம் f ஆக இருந்தால் மட்டுமே சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f(x)$ இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22 $f \circ f(k) = 5$, $f(k) = 2k-1$ எனில், k -யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $f \circ f(k) = f(f(k)) = 2(2k-1)-1 = 4k-3$.

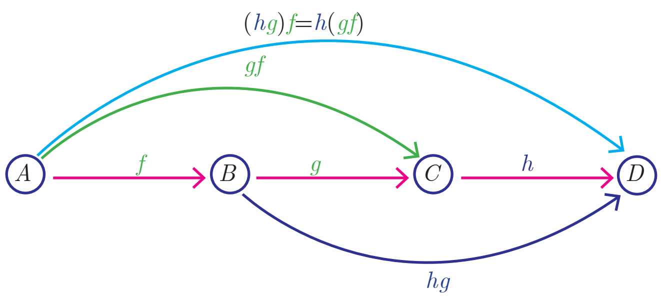
எனவே, $f \circ f(k) = 4k-3$

ஆனால் $f \circ f(k) = 5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$4k-3 = 5 \Rightarrow k = 2$$

1.9.1 மூன்று சார்புகளின் சேர்ப்பு (Composition of three functions)

A, B, C, D ஆகியவை நான்கு கணங்கள் மற்றும் $f : A \to B$, $g : B \to C$ மற்றும் $h : C \to D$ ஆகியவை மூன்று சார்புகள் என்க. சார்புகளின் சேர்ப்பு (படம் 1.43) $f \circ g$ மற்றும் $g \circ h$, ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி இரண்டு புதுச் சார்புகள் $(f \circ g) \circ h$ மற்றும் $f \circ (g \circ h)$ ஆகியவை கிடைக்கப் பெறலாம். சார்புகளின் சேர்ப்பு பரிமாற்று விதியைப் பூர்த்தி செய்வதில்லை என்பதை நாம் அறிவோம். இது சேர்ப்பு விதியைப் பூர்த்தி செய்யுமா?



படம் 1.43

குறிப்பு

> மூன்று சார்புகளின் சேர்ப்பானது எப்போதும் சேர்ப்பு விதியைப் பூர்த்தி செய்யும். அதாவது, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

எடுத்துக்காட்டு 1.23 $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 1-2x$ மற்றும் $h(x) = 3x$ எனில், $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ என நிறுவுக.

தீர்வு $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 1-2x$, $h(x) = 3x$

இப்போது, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-2x) = 2(1-2x)+3 = 5-4x$

மேலும், $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(3x) = 5-4(3x) = 5-12x$ ....(1)

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = 1-2(3x) = 1-6x$

மேலும், $f \circ (g \circ h)(x) = f(1-6x) = 2(1-6x)+3 = 5-12x$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

எடுத்துக்காட்டு 1.24 $f(x) = 3x+1$, $g(x) = x+3$ ஆகியவை இரு சார்புகள். மேலும் $gff(x) = fgg(x)$ எனில் x –ஐக் காண்க.

தீர்வு $gff(x) = g[f\{f(x)\}]$

$= g[f(3x+1)] = g[3(3x+1)+1] = g(9x+4)$

$g(9x+4) = [(9x+4)+3] = 9x+7$

$fgg(x) = f[g\{g(x)\}]$

$= f[g(x+3)] = f[(x+3)+3] = f(x+6)$

$f(x+6) = [3(x+6)+1] = 3x+19$

$gff(x) = fgg(x)$ எனவே, $9x+7 = 3x+19$. இந்தச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $x = 2$.

முன்னேற்றச் சோதனை

பின்வரும் வினாக்களுக்குச் சரியானவற்றைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலமாக விடை கூறுக.

1. சார்புகளின் சேர்ப்பானது பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டது.

   (அ) எப்போதும் உண்மையே (ஆ) ஒருபோதும் உண்மையில்லை (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

2. சார்புகளின் சேர்ப்பானது சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.

   (அ) எப்போதும் உண்மையே (ஆ) ஒருபோதும் உண்மையில்லை (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

செயல்பாடு 4

$h(x) = f \circ g(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் அட்டவணையில் $h(x)$-ஐ பூர்த்தி செய்க.

x	$f(x)$
1	2
2	3
3	1
4	4

x	$g(x)$
1	2
2	4
3	3
4	1

x	$h(x)$
1	3
2	-
3	-
4	-

$h(1)$–ஐ எவ்வாறு கண்டறிவது?

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ g(x) \\ h(1) &= f \circ g(1) \\ &= f(2) = 3 \\ \therefore \quad h(1) &= 3 \end{aligned}$$

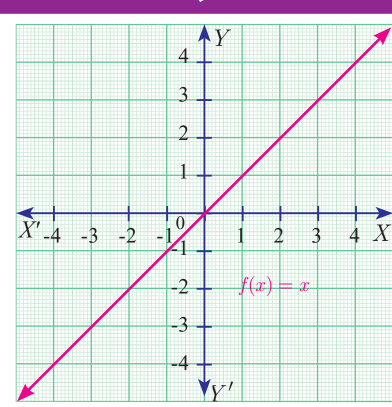
1.10 நேரிய, இருபடி, முப்படி மற்றும் தலைகீழ்ச் சார்புகளுக்கான வரைபடங்களை அடையாளம் காணுதல் (Identifying the graphs of Linear, Quadratic, Cubic and Reciprocal functions)

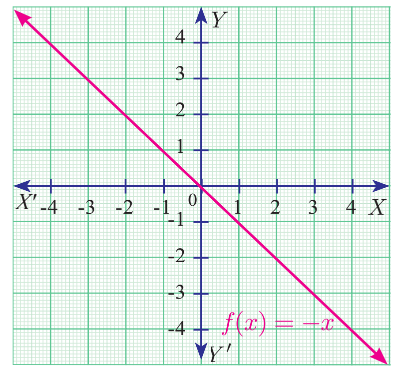
வளைவரைகள் மற்றும் சார்புகளை வரைபடங்களில் காட்சிப்படுத்தலாம். எனவே கருத்துகளை நன்றாகப் புரிந்துகொள்ள வரைபடங்கள் மிகுந்த உதவியாக உள்ளன. இந்தப் பிரிவில், நாம் சில சார்புகளை, வரைபடங்கள் மூலமாக விவாதிக்க உள்ளோம். குறிப்பாக, நேரிய, இருபடி, முப்படி மற்றும் தலைகீழ்ச் சார்புகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிவோம்.

1.10.1 நேரிய சார்புகள் (Linear Function)

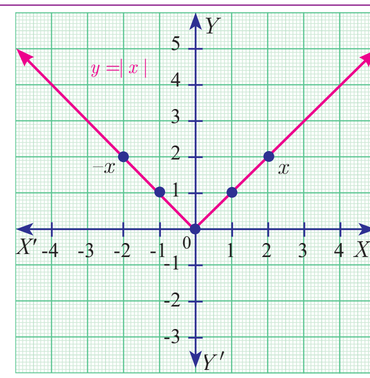
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது, $f(x) = mx + c$, $m \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது நேரிய சார்பாகும். இதை, வடிவியல் முறையில் வரைபடத்தில் நேர்கோடாகக் குறிப்பிடலாம்.

ஒரு சில குறிப்பிட்ட நேரிய சார்புகளும் அதன் வரைபடங்களும் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எண்	சார்புகள்	மதிப்பகம் மற்றும் வரையறை	வரைபடம்
1	சமனிச் சார்பு	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	 படம் 1.44

2	கூட்டல் தலைகீழிச் சார்பு	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=-x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது	 படம் 1.45

1.10.2 மட்டு அல்லது மிகை மதிப்புச் சார்பு (Modulus or Absolute valued Function)



படம் 1.46

$f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ஆனது $f(x)=|\,x\,| \;=\begin{cases} x; & x\geq 0\\ -x; & x<0\end{cases}$ என

வரையறுக்கப்படுகிறது. இதன் வரைபடத்தைக் காண்க.

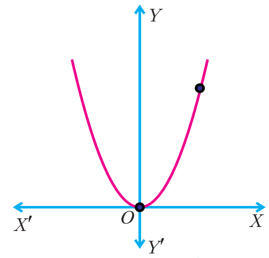
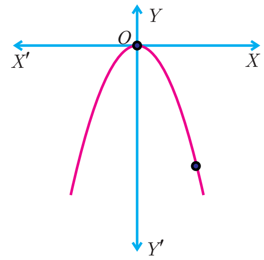
குறிப்பு

- மட்டுச்சார்பானது ஒரு நேரிய சார்பு இல்லை. ஆனால் அது இரு நேரியச் சார்புகள் x மற்றும் $-x$ கலந்த கலவையாகும்.
- நேரிய சமன்பாடுகள் எப்போதும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்புகள் மற்றும் அவை குழுக் குறியியல் (Cryptography) பயன்பாடுகளுக்கும், அறிவியல் மற்றும் தொழில் நுட்பத்தில் சில உட்பிரிவுகளிலும் பயன்படுகின்றன.

1.10.3 இருபடிச் சார்பு (Quadratic Function)

ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதை **இருபடிச் சார்பு** என்கிறோம்.

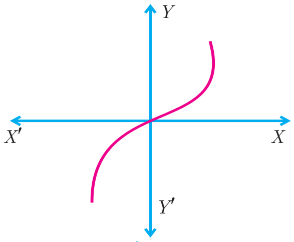
சில குறிப்பிட்ட இருபடிச் சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள்

சார்பு, மதிப்பகம், வீச்சகம் மற்றும் வரையறை	வரைபடம்
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in[0,\infty)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	 படம் 1.47(i)
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=-x^2, x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in(-\infty,0]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	 படம் 1.47(ii)

ஒரு பொருள் புவிஈர்ப்பு விசையின் காரணமாகக் கடந்து செல்லும் பாதை இருபடிச் சார்பாக அமையும். இது ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல. (ஏன்?)

1.10.4 முப்படிச் சார்பு (Cubic Function)

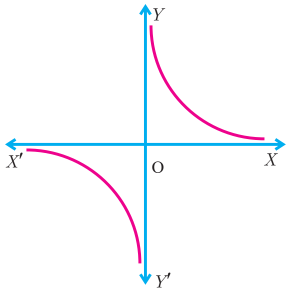
ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதைக் கனச் சார்பு அல்லது முப்படிச் சார்பு என அழைக்கிறோம். $f(x)=x^3$ -ன் வரைபடமானது (படம் 1.48)–ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 1.48

1.10.5 தலைகீழ்ச் சார்பு (Reciprocal Function)

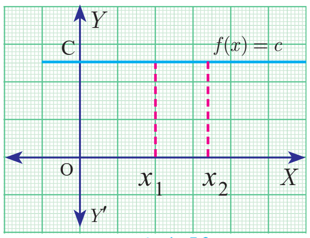
ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது தலைகீழ்ச் சார்பு எனப்படும் (படம் 1.49).



படம் 1.49

1.10.6 மாறிலிச் சார்பு (Constant Function)

ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஐ $f(x)=c,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது மாறிலிச் சார்பு எனப்படும். (படம் 1.50).



படம் 1.50

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு மாறிலிச் சார்பு நேரிய சார்பாகுமா?
2. இருபடிச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா?
3. கனச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா?
4. தலைகீழ்ச் சார்பு இருபுறச்சார்பாகுமா?
5. $f:A\to B$ ஆனது மாறிலிச் சார்பு எனில் f –யின் வீச்சகத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ——— ஆகும்.

பயிற்சி 1.5

1. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள f மற்றும் g எனும் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$ –ஐக் காண்க. $f\circ g=g\circ f$ என்பது சரியா சோதிக்க.

(i) $f(x)=x-6,\ g(x)=x^2$ (ii) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ g(x)=2x^2-1$

(iii) $f(x)=\dfrac{x+6}{3},\ g(x)=3-x$ (iv) $f(x)=3+x,\ g(x)=x-4$

(v) $f(x)=4x^2-1,\ g(x)=1+x$

2. $f\circ g=g\circ f$ எனில் k-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $f(x)=3x+2,\ g(x)=6x-k$ (ii) $f(x)=2x-k,\ g(x)=4x+5$

3. $f(x)=2x-1,\ g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ எனில், $f\circ g=g\circ f=x$ எனக் காட்டுக.

4. $f(x)=x^2-1,\ g(x)=x-2$ மற்றும் $g\circ f(a)=1$ எனில், a-ஐக் காண்க.

5. $A,B,C\subseteq\mathbb{N}$ மற்றும் $f:A\to B$ என்ற சார்பு $f(x)=2x+1$ எனவும் மற்றும் $g:B\to C$ ஆனது $g(x)=x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்பட்டால், $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$.-யின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

6. $f(x)=x^2-1$ எனில் (i) $f\circ f$ (ii) $f\circ f\circ f$ –ஐக் காண்க.

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ மற்றும் $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது முறையே, $f(x)=x^5$, $g(x)=x^4$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f, g ஆகியவை ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா மற்றும் $f\circ g$ ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா என்று ஆராய்க.

8. கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ஆகியவற்றைக் கொண்டு $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ எனக் காட்டுக.

   (i) $f(x)=x-1,\ g(x)=3x+1$ மற்றும் $h(x)=x^2$

   (ii) $f(x)=x^2,\ g(x)=2x$ மற்றும் $h(x)=x+4$

   (iii) $f(x)=x-4,\ g(x)=x^2$ மற்றும் $h(x)=3x-5$

9. $f=\{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ ஆனது $\mathbb{Z}$ –லிருந்து $\mathbb{Z}$ –க்கான ஒரு நேரிய சார்பு எனில், $f(x)$ -ஐக் காண்க.

10. ஒரு மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின்படி, $C(t)$ என்ற ஒரு நேரிய சுற்று, $C(at_1+bt_2)=aC(t_1)+bC(t_2)$ -ஐ பூர்த்தி செய்கிறது. மேலும் இங்கு a,b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில், $C(t)=3t$ ஆனது ஒரு நேரிய சுற்று எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 1.6

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $n(A\times B)=6$ மற்றும் $A=\{1,3\}$ எனில், $n(B)$ ஆனது

   (அ) 1 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) 6

2. $A=\{a,b,p\},\ B=\{2,3\},\ C=\{p,q,r,s\}$ எனில், $n[(A\cup C)\times B]$ ஆனது

   (அ) 8 (ஆ) 20 (இ) 12 (ஈ) 16

3. $A=\{1,2\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{5,6\}$ மற்றும் $D=\{5,6,7,8\}$ எனில் கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது சரியான கூற்று?

   (அ) $(A\times C)\subset(B\times D)$ (ஆ) $(B\times D)\subset(A\times C)$

   (இ) $(A\times B)\subset(A\times D)$ (ஈ) $(D\times A)\subset(B\times A)$

4. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ -லிருந்து, B என்ற கணத்திற்கு 1024 உறவுகள் உள்ளது எனில் B -ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

   (அ) 3 (ஆ) 2 (இ) 4 (ஈ) 8

5. $R = \{(x, x^2) \mid x$ ஆனது 13-ஐ விடக் குறைவான பகா எண்கள்} என்ற உறவின் வீச்சகமானது

(அ) {2,3,5,7} (ஆ) {2,3,5,7,11} (இ) {4,9,25,49,121} (ஈ) {1,4,9,25,49,121}

6. $(a+2, 4)$ மற்றும் $(5, 2a+b)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், (a,b) என்பது

(அ) (2, –2) (ஆ) (5,1) (இ) (2,3) (ஈ) (3, –2)

7. $n(A) = m$ மற்றும் $n(B) = n$ என்க. A –லிருந்து B-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட வெற்று கணமில்லாத உறவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை.

(அ) m^n (ஆ) n^m (இ) $2^{mn} - 1$ (ஈ) 2^{mn}

8. $\{(a,8),(6,b)\}$ ஆனது ஒரு சமனிச் சார்பு எனில், a மற்றும் b மதிப்புகளாவன முறையே

(அ) (8,6) (ஆ) (8,8) (இ) (6,8) (ஈ) (6,6)

9. Let $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{4,8,9,10\}$ என்க. சார்பு $f : A \to B$ ஆனது $f = \{(1,4),(2,8),(3,9),(4,10)\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் f -என்பது

(அ) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு (ஆ) சமனிச் சார்பு

(இ) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு (ஈ) உட்சார்பு

10. $f(x) = 2x^2$ மற்றும் $g(x) = \dfrac{1}{3x}$ எனில் $f \circ g$ ஆனது

(அ) $\dfrac{3}{2x^2}$ (ஆ) $\dfrac{2}{3x^2}$ (இ) $\dfrac{2}{9x^2}$ (ஈ) $\dfrac{1}{6x^2}$

11. $f : A \to B$ ஆனது இருபுறச் சார்பு மற்றும் $n(B) = 7$ எனில் $n(A)$ ஆனது

(அ) 7 (ஆ) 49 (இ) 1 (ஈ) 14

12. f மற்றும் g என்ற இரண்டு சார்புகளும்
$f = \{(0,1),(2,0),(3,-4),(4,2),(5,7)\}$
$g = \{(0,2),(1,0),(2,4),(-4,2),(7,0)\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $f \circ g$ -ன் வீச்சகமானது

(அ) {0,2,3,4,5} (ஆ) {–4,1,0,2,7} (இ) {1,2,3,4,5} (ஈ) {0,1,2}

13. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ எனில்

(அ) $f(xy) = f(x).f(y)$ (ஆ) $f(xy) \geq f(x).f(y)$

(இ) $f(xy) \leq f(x).f(y)$ (ஈ) இவற்றில் ஒன்றுமில்லை

14. $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ என்ற சார்பானது $g(x) = \alpha x + \beta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் α மற்றும் β -வின் மதிப்பானது

(அ) (–1,2) (ஆ)(2, –1) (இ) (–1, –2) (ஈ) (1,2)

15. $f(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$ குறிப்பிடும் சார்பானது

(அ) நேரிய சார்பு (ஆ) ஒரு கனச் சார்பு (இ) தலைகீழ்ச் சார்பு (ஈ) இருபடிச் சார்பு

அலகுப் பயிற்சி - 1

1. $(x^2 - 3x,\ y^2 + 4y)$ மற்றும் $(-2, 5)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், x மற்றும் y -ஐக் காண்க.

2. $A \times A$ கார்டீசியன் பெருக்கல் பலனின், 9 உறுப்புகளில், உறுப்புகள் $(-1, 0)$ மற்றும் $(0,1)$ –யும் இருக்கிறது எனில், A -யில் உள்ள உறுப்புகளைக் காண்க. மற்றும் $A \times A$ –ன் மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால்,

(i) $f(0)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(a+1)$ ($a \geq 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) ஆகியவற்றை காண்க.

4. $A = \{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ என்க. மற்றும் $f : A \to N$ ஆனது $f(n) = n$ -ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி $(n \in A)$ என வரையறுக்கப்பட்டால் f -ன் வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தை எழுதுக மற்றும் f –ன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

5. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}$ என்ற சார்பின் மதிப்பகத்தைக் காண்க.

6. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ மற்றும் $h(x) = x - 2$ எனில், $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ என நிறுவுக.

7. $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{5,6\}$ மற்றும் $D = \{5,6,7,8\}$ எனில், $A\times C$ ஆனது $B\times D$ உட்கணமா எனச் சரிபார்க்க.

8. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $f(f(x)) = -\dfrac{1}{x}$ எனக் காட்டுக.

9. சார்பு f மற்றும் g ஆகியவை $f(x) = 6x + 8;\ g(x) = \dfrac{x-2}{3}$ எனில்,

(i) $gg\left(\dfrac{1}{2}\right)$ -யின் மதிப்பைக் காண்க. (ii) $gf(x)$ -ஐ எளிய வடிவில் எழுதுக.

10. பின்வருவற்றின் மதிப்பகங்களை எழுதுக.

(i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-9}$ (ii) $p(x) = \dfrac{-5}{4x^2+1}$ (iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$ (iv) $h(x) = x + 6$

நினைவில் கொள்ளவேண்டியவை

- A உடன் B -க்கான கார்டீசியன் பெருக்கலை $A \times B = \{(a,b)$ அனைத்து $a \in A,\ b \in B\}$ என வரையறுக்கலாம்.
- A-லிருந்து B-க்கான உறவு R ஆனது, $A \times B$ -யின் உட்கணமாகும். அதாவது, $R \subseteq A \times B$.
- X லிருந்து Y க்கான உறவு f-ல் ஒவ்வொரு $x \in X$ க்கும் ஒரே ஒரு $y \in Y$ உண்டு எனில், அதை சார்பு என்கிறோம்.
- ஒரு சார்பைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்
  (i) அம்புக் குறி படம் (ii) அட்டவணை முறை
  (iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (iv) வரைபட முறை
- சில வகையான சார்புகளாவன
  (i) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு (ii) மேல் சார்பு
  (iii) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு (iv) உட்சார்பு
- சமனிச் சார்பு $f(x) = x$.
- தலைகீழ்ச் சார்பு $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- மாறிலிச் சார்பு $f(x) = c$.
- நேரியச் சார்பு $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
- இருப்படிச் சார்பு $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- முப்படிச் சார்பு (கனச்சார்பு) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

- A, B மற்றும் C ஆகியவை மூன்று வெற்றில்லா கணங்கள், $f : A \to B$, $g : B \to C$ ஆகியவை இரண்டு சார்புகள் எனில், $g \circ f : A \to C$ என்ற f மற்றும் g சார்புகளின் சேர்ப்பை $g \circ f(x) = g(f(x))$ (அனைத்து $x \in A$) என வரையறுக்கலாம்.
- f, g ஆகியவை ஏதேனும் இரு சார்புகள் எனில், பொதுவாக $f \circ g \neq g \circ f$.
- f, g மற்றும் h ஏதேனும் மூன்று சார்புகள் எனில் $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

இணையச் செயல்பாடு (ICT)

ICT 1.1

படி 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க. Geogebra –வின் Relations and Functions பக்கத்திற்குச் செல்க. பணித்தாளின் இடப்புறம் பல செயல்பாடுகள் உறவுகளும் சார்புகளும் என்ற தலைப்பிற்கு தொடர்புடையதாக இருக்கும். அவற்றில் Functions Identification என்ற பணித்தாளை தேர்வு செய்யவும்.

படி 2: இடப்புறம் கொடுக்கப்பட்ட பணித்தாளில் ஒவ்வொரு சார்பிற்கும் உரிய பெட்டியைத் தேர்ந்தெடுக்க. அதற்கான வரைபடம் வலப்புறம் இருப்பதைக் காணலாம். ஒவ்வொரு வரைபடத்தையும் புரிந்து கொண்டபின் New functions கிளிக் செய்க. தொடர்க.

படி 1

படி 2

முடிவுகள்

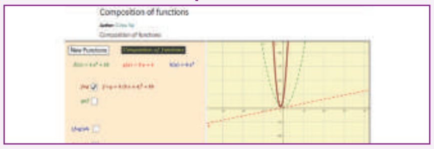
ICT 1.2

படி 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க. Geogebra –வின் Relations and Functions பக்கத்திற்குச் செல்க. பணித்தாளின் இடப்புறம் பல செயல்பாடுகள் உறவுகளும் சார்புகளும் என்ற தலைப்பிற்கு தொடர்புடையதாக இருக்கும். அவற்றில் Compositions of functions என்ற பணித்தாளை தேர்வு செய்யவும்.

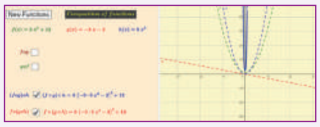
படி 2: கொடுக்கப்பட்ட பணித்தாளில் New problem என்பதை சொடுக்குவதன் மூலம் பணித்தாளின் கேள்வியை மாற்ற முடியும். பின்னர் வலை நகர்த்தி கணக்கின் படிகளைக் காணலாம். சரிபார்க்கும் பெட்டியைச் சொடுக்கி சரியான விடையைப் பார்க்கவும்.

படி 1

படி 2



முடிவுகள்



இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356191

அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்யவும்.

B371_10_MATHS_TM

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1.(i) $A \times B = \{(2,1),(2,-4),(-2,1),(-2,-4),(3,1),(3,-4)\}$

$A \times A = \{(2,2),(2,-2),(2,3),(-2,2),(-2,-2),(-2,3),(3,2),(3,-2),(3,3)\}$

$B \times A = \{(1,2),(1,-2),(1,3),(-4,2),(-4,-2),(-4,3)\}$

(ii) $A \times B = \{(p,p)(p,q)(q,p)(q,q)\}$; $A \times A = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$;

$B \times A = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

(iii) $A \times B = \{\ \}$; $A \times A = \{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$; $B \times A = \{\ \}$

2. $A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

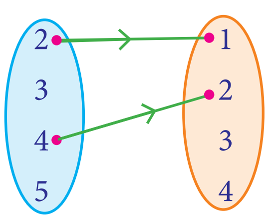
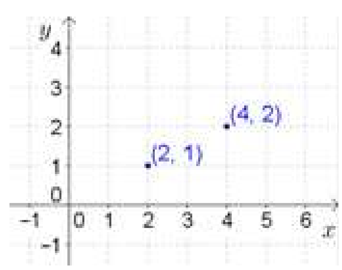
$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

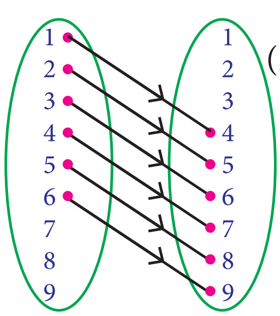
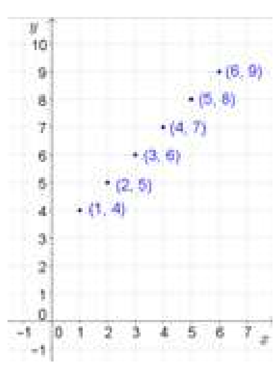
3. $A = \{3,4\}$ $B = \{-2,0,3\}$ 5. உண்மை

பயிற்சி 1.2

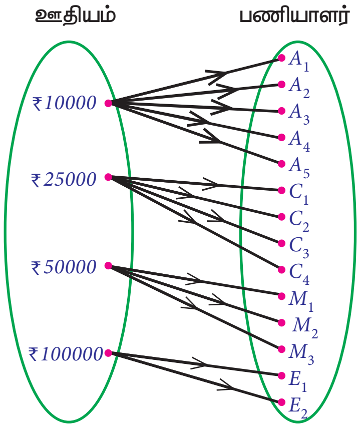
1.(i) உறவு இல்லை (ii) உறவு இல்லை (iii) உறவு (iv) உறவு இல்லை

2. $\{1,2,3,4,5,6\},\{1,4,9,16,25,36\}$ 3. $\{0,1,2,3,4,5\},\{3,4,5,6,7,8\}$

4. (i)(i)  (ii)  (iii) $\{(2,1),(4,2)\}$

(ii)(i)  (ii)  (iii) $\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\}$

5. $\{(10000,A_1),(10000,A_2),(10000,A_3),(10000,A_4),$
$(10000,A_5),(25000,C_1),(25000,C_2),(25000,C_3),$
$(25000,C_4),(50000,M_1),(50000,M_2),(50000,M_3),$
$(100000,E_1),(100000,E_2)\}$



பயிற்சி 1.3

1. $\{1,2,3,4,\ldots\}$, $\{1,2,3,4,\ldots\}$, $\{2,4,6,8,\ldots\}$, ஆம். 2. ஆம்

3.(i) 12 (ii) $4a^2-10a+6$ (iii) 0 (iv) $x^2-7x+12$

4.(i) (அ) 9 (ஆ) 6 (இ) 6 (ஈ) 0

(ii) 9.5 (iii) (a) $\{x \,/\, 0\le x\le 10, x\in R\}$ (b) $\{x \,/\, 0\le x\le 9, x\in R\}$

(iv) 5 5. 2 6.(i) -2 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

7. $4x^3-96x^2+576x$ 8. 1 9. $500t$

10.(i) ஆம் (ii) 0.9,24.5 (iii) 60.5 அங்குலம் (iv) 32 செ.மீ

பயிற்சி 1.4

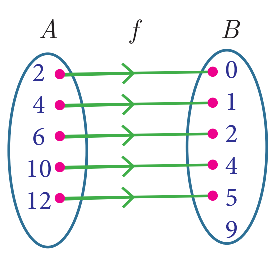
1.(i) சார்பு அல்ல (ii) சார்பு (iii) சார்பு அல்ல (iv) சார்பு

2.(i) $\{(2,0),(4,1),(6,2),(10,4),(12,5)\}$

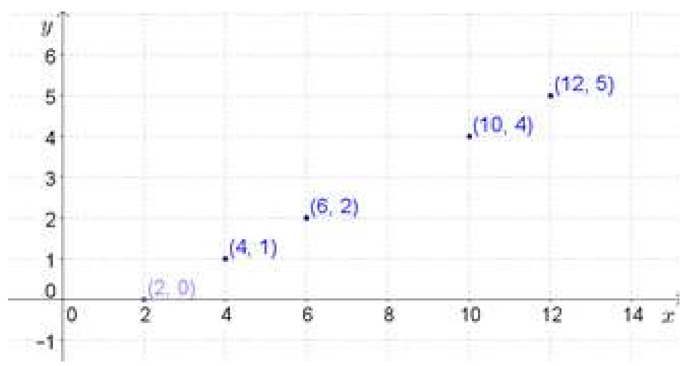
(ii)

x	2	4	6	10	12
$f(x)$	0	1	2	4	5

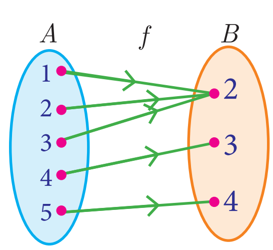
(iii)



(iv)



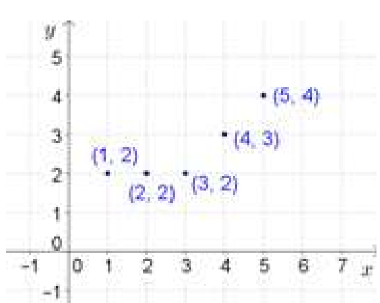
3.(i)



(ii)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	2	2	3	4

(iii)



6.(i) $\{1,8,27,64\}$ (ii) ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் உள்நோக்கிய சார்பு

7.(i) இருபுறச் சார்பு (ii) இருபுறச் சார்பு இல்லை 8. $a=-1$ அல்லது 1, $b=1$

9.(i) 5 (ii) 2 (iii) -2.5 (iv) 1

10.(i) 2 (ii) 10 (iii) 178 (iv) $\frac{-9}{17}$

11. ஆம் 12.(i) $32°F$ (ii) $82.4°F$ (iii) $14°F$ (iv) $100°C$ (v) $-40°$

பயிற்சி 1.5

1.(i) $x^2-6,\ (x-6)^2$; சமமில்லை (ii) $\frac{2}{2x^2-1},\ \frac{8}{x^2}-1$; சமமில்லை

(iii) $\frac{3-x}{3}$, $\frac{9-x}{3}$; சமமில்லை (iv) $x-1,\ x-1$; சமம் (v) $4x^2+8x+3,\ 4x^2$; சமமில்லை

2.(i) -5 (ii) $\frac{-5}{3}$ 4. $a=\pm 2$

5. $\left\{y \mid y=2x^2+1,\ x\in\mathbb{N}\right\}$; $\left\{y \mid y=(2x+1)^2, x\in\mathbb{N}\right\}$ 6.(i) x^4-2x^2

(ii) $\left[x^4-2x^2\right]^2-1$ 7. f ஆனது ஒன்றுக்கொன்று, g ஆனது ஒன்றுக்கொன்று இல்லை, $f\circ g$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று இல்லை 9. $-4x-1$

பயிற்சி 1.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(இ)	(இ)	(அ)	(ஆ)	(இ)	(ஈ)	(ஈ)	(அ)	(இ)	(இ)	(அ)	(ஈ)	(இ)	(ஆ)	(ஈ)

அலகு பயிற்சி–1

1. 1, 2 மற்றும் -5 , 1 2. $\{-1,0,1\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

3. (i) 4 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{a}$

4. $\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$, $\{2,3,5,7,11,13,17\}$

5. $-1\le x\le 1$ 9.(i) $\frac{-5}{6}$ (ii) $2(x+1)$ 10.(i) $R-\{9\}$ (ii) R (iii) $[2,\infty)$ (iv) R

பயிற்சி 2.1

1. 2, 5, 8, 11, … 2. 25, 7 6.(i) 4 (ii) 51

(iii) 144 (iv) 6 7. 174 8. $2,-1$ 9. 6

பயிற்சி 2.2

1. இரட்டை எண்கள் 2. மதிப்பு இல்லை 3. 10101 4. 9, 3

5. 2,3,5,7 மற்றும் 3,4,2,1 6. 2040, 34 7. 999720 8. 3647 9. 2520

பயிற்சி 2.3

1.(i) 7 (ii) 5 (iii) 2 (iv) 7 (v) 2

2. 3 3. 2,8,14,… 4. 8, 19, 30, … 5. 11 மு.ப

6. 8 பி.ப 7. வெள்ளி 9. 2 10. 6 மு.ப, திங்கள்

பயிற்சி 2.4

1.(i) 216,648,1944 (ii) $-7,-11,-15$ (iii) $\frac{4}{25},\frac{5}{36},\frac{6}{49}$ 2.(i) $-1,6,25,62$